

Processus de branchement et structures de contacts pour des modèles en épidémiologie

Vincent Bansaye,
collaborations avec E. Vergu et F. Deslandes (INRAe), C. Gu (NYU
Shanghai) et L. Yuan (Liverpool), M. Salvi (Roma)

Ecole polytechnique

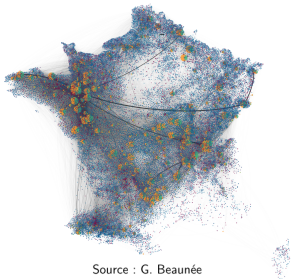
30 août 2022, Journées MAS, Rouen.



Motivations

Etude de maladies à transmission directe entre un infecté et un susceptible, collaborations avec E. Vergu et F. Deslandes (INRAe)

Propagation de maladies (fièvre aphteuse, tuberculose bovine...) parmi les bovins au sein du réseau des fermes en France. (ANR Cadence).



Source : G. Beaunée

COVID 19.

MODGAV19

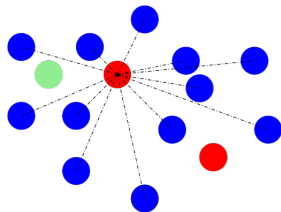
Un premier modèle en population homogène et mélangée (SIR)

3 états sanitaires : Sain, Infecté, Remis.

Population de taille constante et grande : $N \gg 1$.

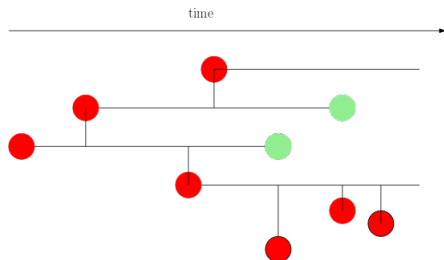
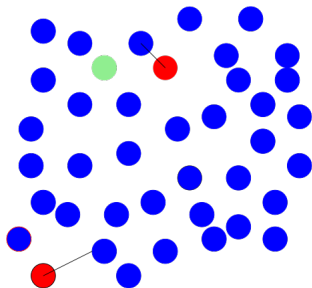
Chaque individu infecté

- contamine chaque individu sain au taux β/N
- guérit au taux γ



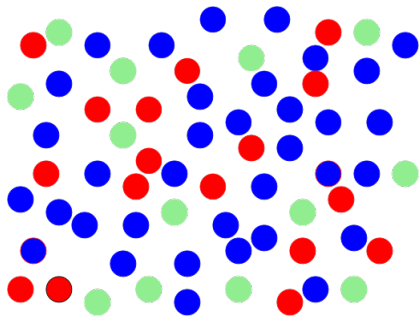
Est ce que l'épidémie explose et comment ?

Au début de l'épidémie, approximation pour $N \gg 1$ par un *processus de branchement* avec une seule population (les infectés) : chaque individu infecte au taux β un nouvel individu avant de guérir (au taux γ).



Si l'épidémie explose, quelle dynamique se met en place ?

Quand la population infectée devient de l'ordre de \mathbf{N} , une loi des grands nombres permet d'approcher le processus SIR renormalisé par \mathbf{N} par un système dynamique



$$\begin{aligned} S'_t &= -\beta S_t I_t \\ I'_t &= \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ R'_t &= \gamma I_t \end{aligned}$$

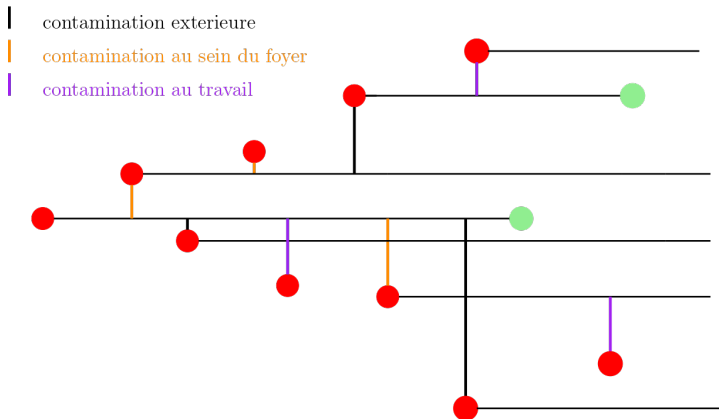
⇒ Une évolution déterministe (ou presque...).

Des extensions "classiques" : âge dépendance, population hétérogène ; exposés-asymptomatiques...

Diverses questions, souvent largement ouvertes :

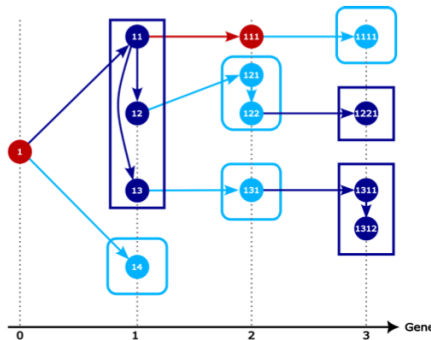
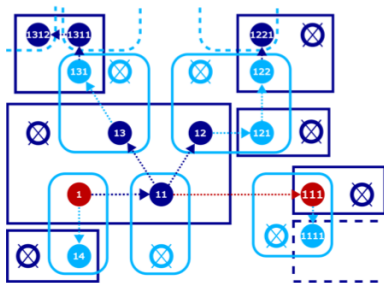
- Régime intermédiaire "moyenne population"
- **Structuration des contacts** : traçage, population seulement partiellement mélangée et prise en compte des graphes de contacts induits par les foyers, lieux de travail ou écoles, la structure spatiale...
- Echantillonnage, lignée ancestrale et inférence, évolution de la maladie et phylogénie

En pratique, la population n'est que partiellement mélangée : rôle en particulier des foyers et lieux de travail/écoles qui sont en petites populations.



Critère d'explosion

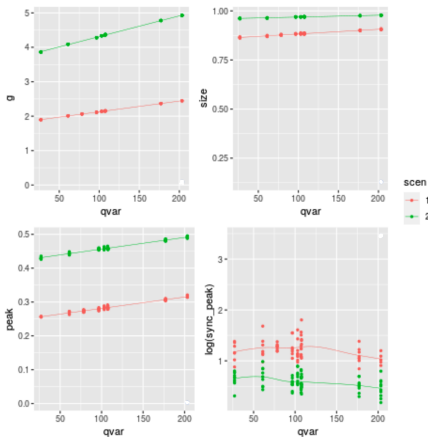
Pour le critère d'explosion, on peut ramener l'étude à un processus de branchement à trois types (suivant le mode d'infection) en agrégeant les épidémies locales (Pellis et al 2012).



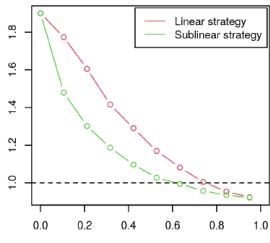
courtesy : M. Kubasch.

Effet de la taille des sites (simulations de F. Deslandes)

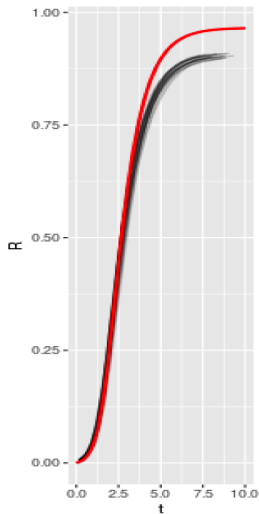
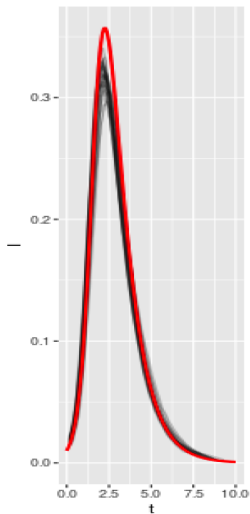
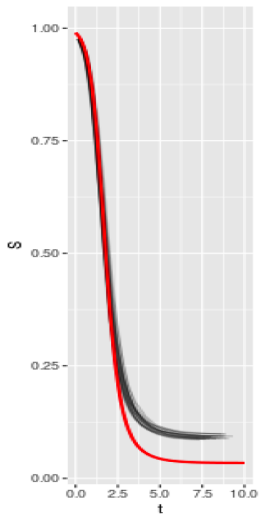
Epidemic outcomes in function of the variance of size distribution of working places



Evolution of R0 with teleworking strategies



Reduction en grande population (simulations de F. Deslandes)



Difficultés

- l'épidémie et le traçage sont des dynamiques couplées
- le traçage a un effet rétrograde dans l'arbre d'infection

Modélisation du début de l'épidémie par processus de branchement

- Processus de branchement multitype : R_0 [Lambert 20]
- Vitesse de croissance et aspect dynamique pour un traçage progressif [Akian, Ganassali, Gaubert, Massoulié 20]
- Une approche par percolation sur un arbre de branchement [Barlow 20]
- *Travail en collaboration avec Chenlin Gu (Courant I. NYU Shanghai) et Linglong Yuan (Liverpool) 21 : une modélisation dynamique de la perte des contacts.*
- Perte instantanée des contacts [Bertoin 22]

Difficultés

- l'épidémie et le traçage sont des dynamiques couplées
- le traçage a un effet rétrograde dans l'arbre d'infection

Modélisation du début de l'épidémie par processus de branchement

- Processus de branchement multitype : R_0 [Lambert 20]
- Vitesse de croissance et aspect dynamique pour un traçage progressif [Akian, Ganassali, Gaubert, Massoulié 20]
- Une approche par percolation sur un arbre de branchement [Barlow 20]
- *Travail en collaboration avec Chenlin Gu (Courant I. NYU Shanghai) et Linglong Yuan (Liverpool) 21 : une modélisation dynamique de la perte des contacts.*
- Perte instantanée des contacts [Bertoin 22]

Approximation processus de branchement

- chaque infecté contamine une nouvelle personne au taux β (naissance)
- chaque contact infectieux est "perdu" au taux γ (suppression de l'arête dans l'arbre)
- chaque infecté est testé au taux θ et alors lui et ses contacts encore traçables sont isolés immédiatement (blocage de la composante connexe)

Hypothèses : pas de guérison, population mélangée et homogène.

Généralisation, notamment avec guérison, attendue pour le comportement en temps long mais structure probabiliste moins claire...

Approximation processus de branchement

- chaque infecté contamine une nouvelle personne au taux β (naissance)
- chaque contact infectieux est "perdu" au taux γ (suppression de l'arête dans l'arbre)
- chaque infecté est testé au taux θ et alors lui et ses contacts encore traçables sont isolés immédiatement (blocage de la composante connexe)

Hypothèses : pas de guérison, population mélangée et homogène.

Généralisation, notamment avec guérison, attendue pour le comportement en temps long mais structure probabiliste moins claire...



Time



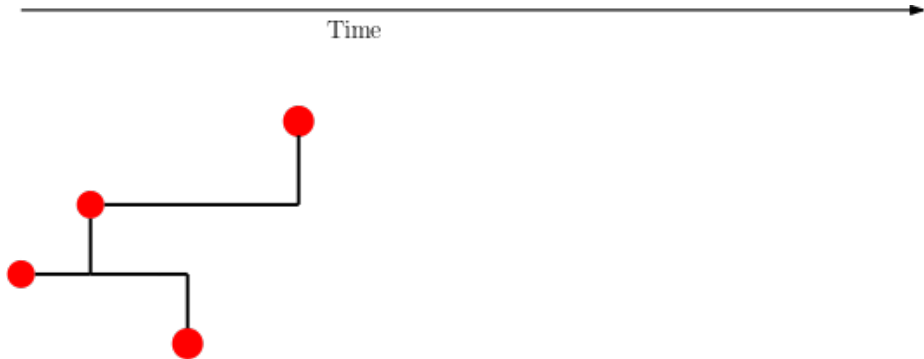


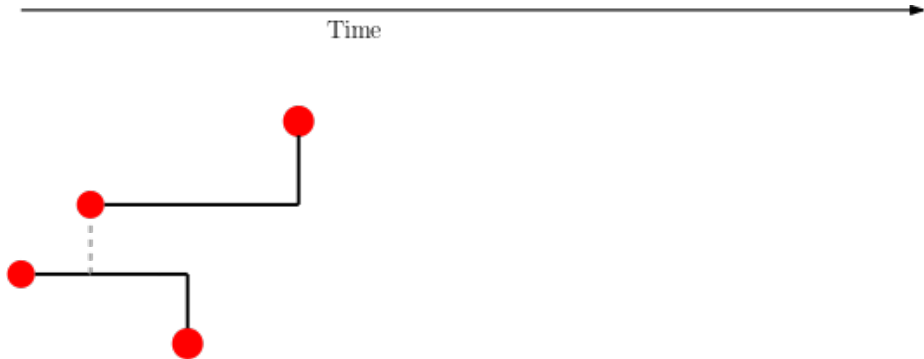
Time

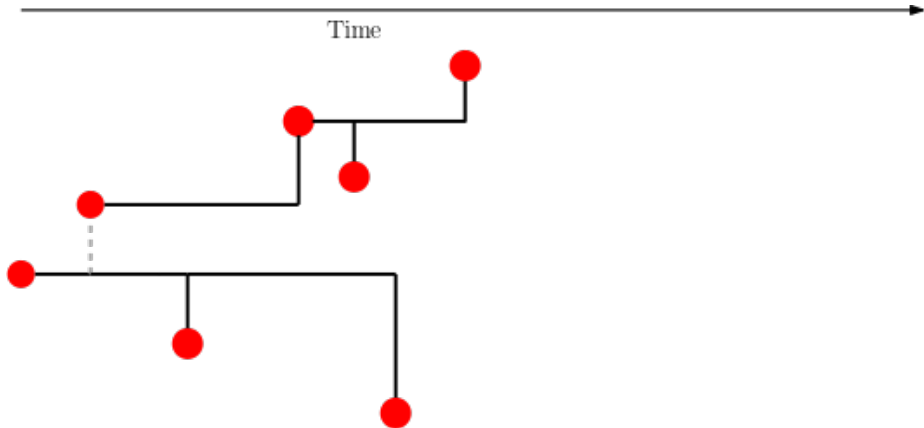


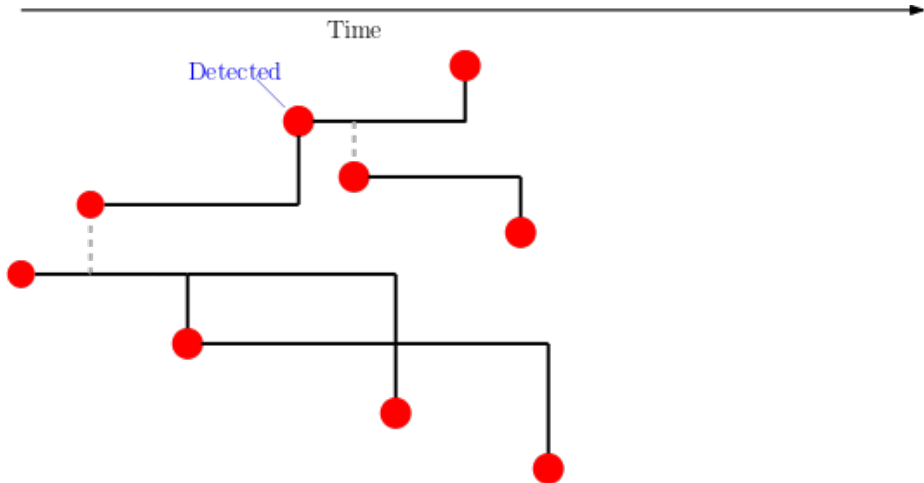
Time

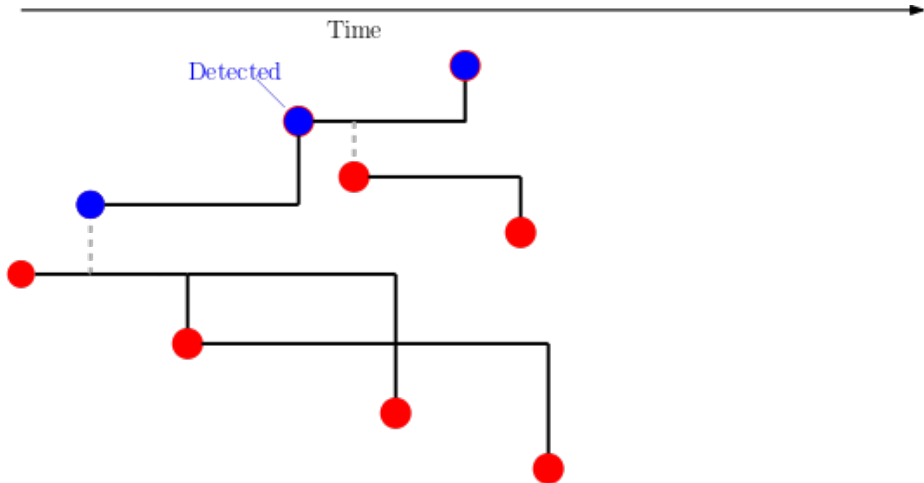


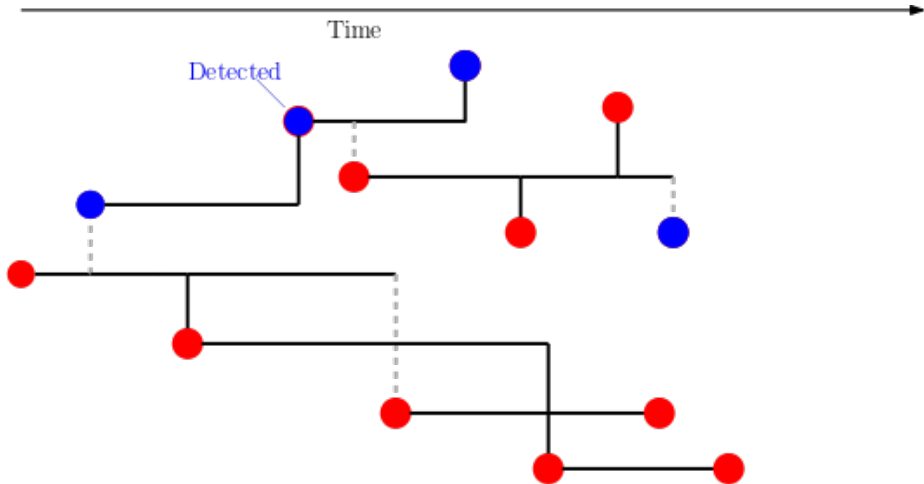


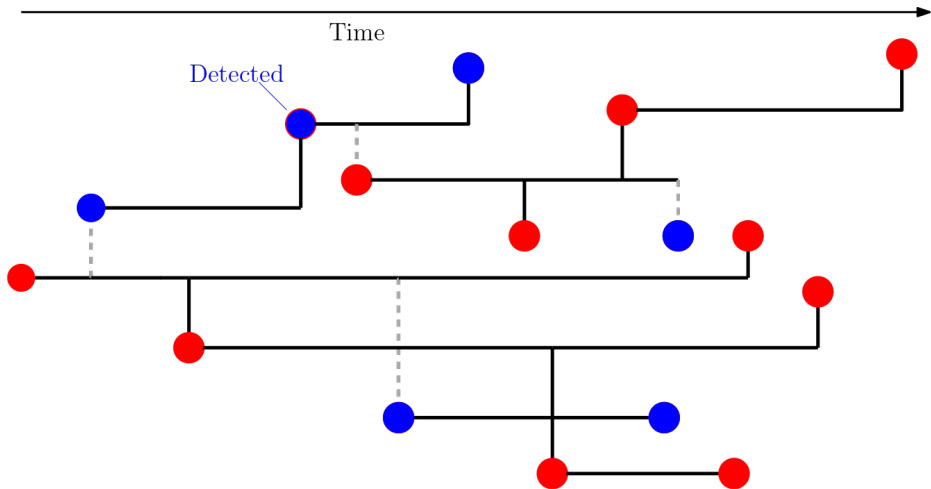


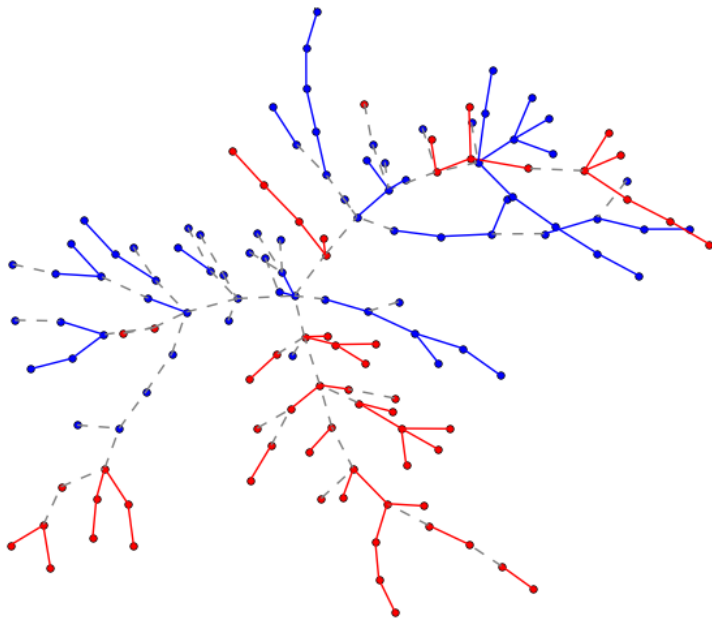






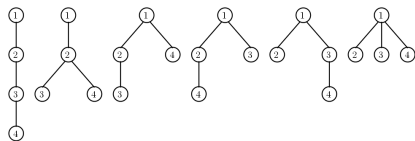






Propriété magique de l'arbre des infections

L'arbre des infections (Yule) est, conditionnellement à sa taille et en oubliant les longueurs des arêtes de l'arbre, un **arbre récursif uniforme**.



Les arbres récursifs de taille 4

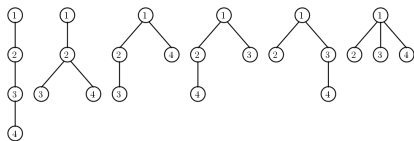
Proposition (Meir Moon)

Supprimons (uniformément) une arête dans l'arbre récursif uniforme. Alors les deux composantes connexes sont, conditionnellement à leur taille, deux arbres récursifs uniformes indépendants.

$$\mathbb{P}(n \rightarrow (n-j, j)) = \frac{n}{n-1} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Propriété magique de l'arbre des infections

L'arbre des infections (Yule) est, conditionnellement à sa taille et en oubliant les longueurs des arêtes de l'arbre, un **arbre récursif uniforme**.



Les arbres récursifs de taille 4

Proposition (Meir Moon)

Supprimons (uniformément) une arête dans l'arbre récursif uniforme. Alors les deux composantes connexes sont, conditionnellement à leur taille, deux arbres récursifs uniformes indépendants.

$$\mathbb{P}(n \rightarrow (n-j, j)) = \frac{n}{n-1} \frac{1}{j(j+1)}.$$

Processus des tailles de clusters

A un temps donné, conditionnellement à leur taille, les clusters sont distribués comme des arbres récursifs uniformes indépendants.

Nous sommes ramenés à l'étude du processus des tailles, processus de branchement où chaque cluster est identifié par sa taille $\in \mathbb{N}_*$.

Cette étude passe par l'analyse de la moyenne du nombre de clusters de tailles donnés, semi-groupe de "croissance fragmentation isolation".

Etude du premier moment (réduit)

$M_t(n, m)$ est le nombre moyen de clusters actifs de taille $m \geq 1$ engendré au temps t par un cluster initial de taille $n \geq 1$.

$$M'_t = AM_t$$

Proposition

Il existe un unique triplet (λ, π, h) avec λ réel et $(\pi(n))_{n \geq 1}$ probabilité et $(h(n))_{n \geq 1}$ fonction positive bornée tels que pour tout $t \geq 0$,

$$\pi M_t = e^{\lambda t} \pi, \quad M_t h = e^{\lambda t} h, \quad \langle \pi, h \rangle = 1.$$

Pour tout $p > 0$, il existe $C, \omega > 0$ tel que pour tous $n, m \geq 1, t \geq 0$,

$$|e^{-\lambda t} M_t(n, m) - h(n)\pi(m)| \leq Cn^p m^{-p} e^{-\omega t},$$

"Preuve" Semi groupe "de croissance fragmentation" via irréductibilité et fonctions de Lyapunov donnant une contraction en V.T. à poids.

Analyse quantitative de semi groupe positif

Famille $(M_t)_{t \geq 0}$ opérateurs linéaires sur un espace de fonctions mesurables sur \mathcal{X} qui vérifie pour $s, t \geq 0$

$$M_{t+s}f = M_t(M_s f).$$

Positivité : $f \geq 0 \Rightarrow M_t f \geq 0$.

Extension des estimations type "Perron Frobenius" en dimension infinie

- Approche spectrale : Mischler and al...
- Géométrie de Hilbert et contraction de Birkhoff, voir Nussbaum...
- Utilisation des estimations pour les **processus de Markov**, i.e. le cas où $M_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, cf Meyn et Tweedie, Hairer et Mattingly ; Kontoyiannis et Meyn ; Del Moral et Miclo, Champagnat et Villemonais ; B., Cloez, Gabriel et Marguet, Bertoin et Watson...

Cas $M_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$: analyse quantitative de semi groupe conservatif.

Pour un semi groupe de Markov qui vérifie

- **Conditions de Lyapunov.** Il existe $K \subset \mathcal{X}$ et $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, +\infty)$ tels que

$$M_\tau V \leq \alpha V + b \mathbf{1}_K$$

avec $\alpha \in (0, 1)$ and $b \geq 0$.

- **Condition de Doeblin locale.** Il existe une mesure de probabilité ν sur \mathcal{X} et $c > 0$ telles que pour tous $x \in K$ et f ,

$$M_\tau f(x) \geq c \nu(f).$$

Alors il existe des constantes (explicites) $C, \omega > 0$ telles que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $|f| \leq V$ et $t \geq 0$,

$$|M_t f(x) - \gamma(f)| \leq CV(x)e^{-\omega t}.$$

Contraction en VT à poids sur l'espace des mesures signées, avec action à gauche définie par $(\mu M_t)f = \int \mu(dx) M_t f(x)$.

Cas $M_t h = e^{\lambda t} h$: utilisation d'une h transform

Si on connaît une fonction propre h positive, on peut introduire le semi groupe conservatif

$$P_t f = \frac{M_t(hf)}{e^{\lambda t} h}.$$

et utiliser les estimations précédentes pour

$$M_t f = e^{\lambda t} h P_t(f/h) \approx e^{\lambda t} h \gamma(f/h).$$

Estimations dans le cas général

travail avec B. Cloez, P. Gabriel, A. Marguet (2019)

On utilise une particule choisie avec un biais par ψ à l'instant t , qui donne un processus de Markov inhomogène de semi groupe :

$$P_{s,u}^{(t)} f = \frac{M_{u-s}(fM_{t-u}\psi)}{M_{t-s}\psi}.$$

Obtention de condition de Doeblin locale pour $P^{(t)}$ en suivant [Champagnat Villemonais 2015].

Construction d'une famille de fonction de Lyapunov en s'inspirant de la h transformée.

Application du résultat au problème de croissance-fragmentation-isolation

Le semigroupe M du premier moment a pour générateur

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}f(n) = & \underbrace{\beta n(f(n+1) - f(n))}_{\text{"growth"}} \underbrace{- \theta n f(n)}_{\text{"isolation"}} \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma n}{j(j+1)} (f(j) + f(n-j) - f(n))}_{\text{"fragmentation"}}. \end{aligned}$$

- la condition locale de Doeblin est une conséquence de l'irréductibilité (espace discret)
- la condition de Lyapunov est montrée par des conditions de dérive sur \mathfrak{L} (en particulier $\mathfrak{L}\psi \geq c\psi$)

Explosion et convergences fortes

Theorem

Si $\lambda \leq 0$, l'épidémie s'éteint p.s. en temps fini (et λ quantifie la vitesse).

Sinon, elle se développe avec $\mathbb{P} > 0$, croit au taux λ et les tailles des clusters se distribuent selon π :

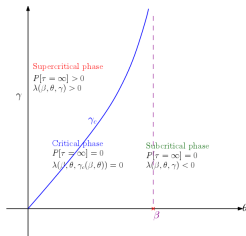


Diagramme des phases. Taux d'infection β fixé, taux d'isolation θ et taux de perte des contacts γ

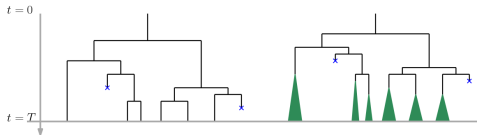
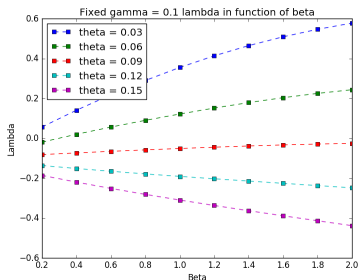
$$e^{-\lambda t} \langle X_t, f \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} W \langle \pi, f \rangle,$$

p.s. et dans L^2 pour des fonctions f à croissance au plus polynomiale.

"Preuve". Indépendance asymptotique entre clusters, martingales associées à la fonction harmonique, contrôle des fluctuations (en suivant les travaux d'Athreya).

Changement de monotonie de la vitesse d'infection

La vitesse λ est croissante en β si $\gamma \geq \theta$ et décroissante si $\theta \geq \gamma$: l'augmentation du taux d'infection peut induire un ralentissement de l'épidémie.



"Preuve". Comparaison des éléments propres avec ceux d'un processus modifié pour lequel des couplages monotones sont possibles.

Quelques perspectives

- Perte instantanée des contacts
- Prise en compte de la guérison
- Temps non exponentiels, processus non Markovien
- structuration à plusieurs niveaux ou spatiale des contacts
- ...

Grands graphes aléatoires pour modéliser un réseau d'habitat, homogénéisation stochastique (collaboration avec M. Salvi).