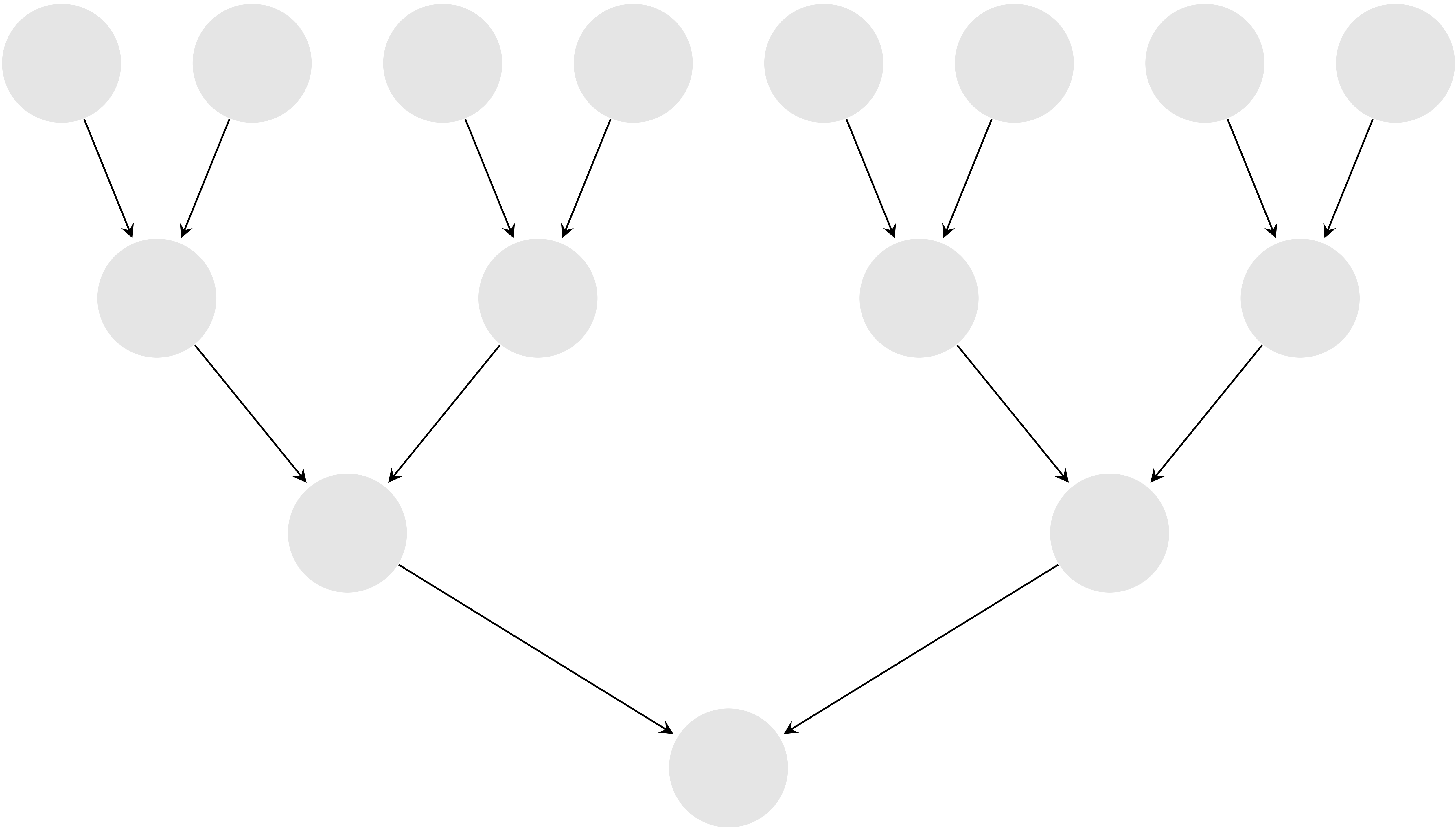
Parking sur l'arbre binaire infini

Alice Contat
Université Paris-Saclay

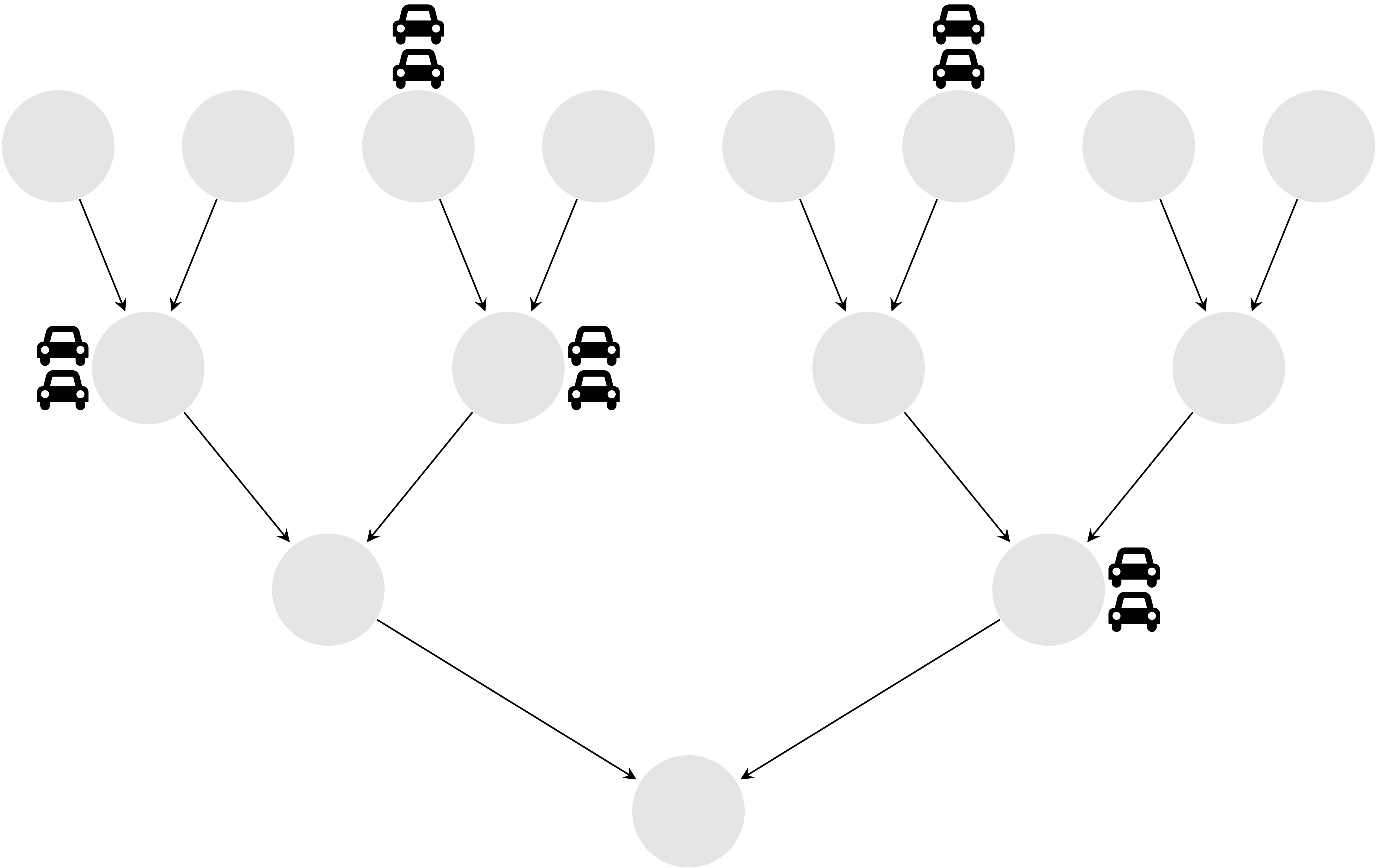
avec David Aldous, Nicolas Curien and Olivier Hénard

Journées MAS 2022
30.08.2022

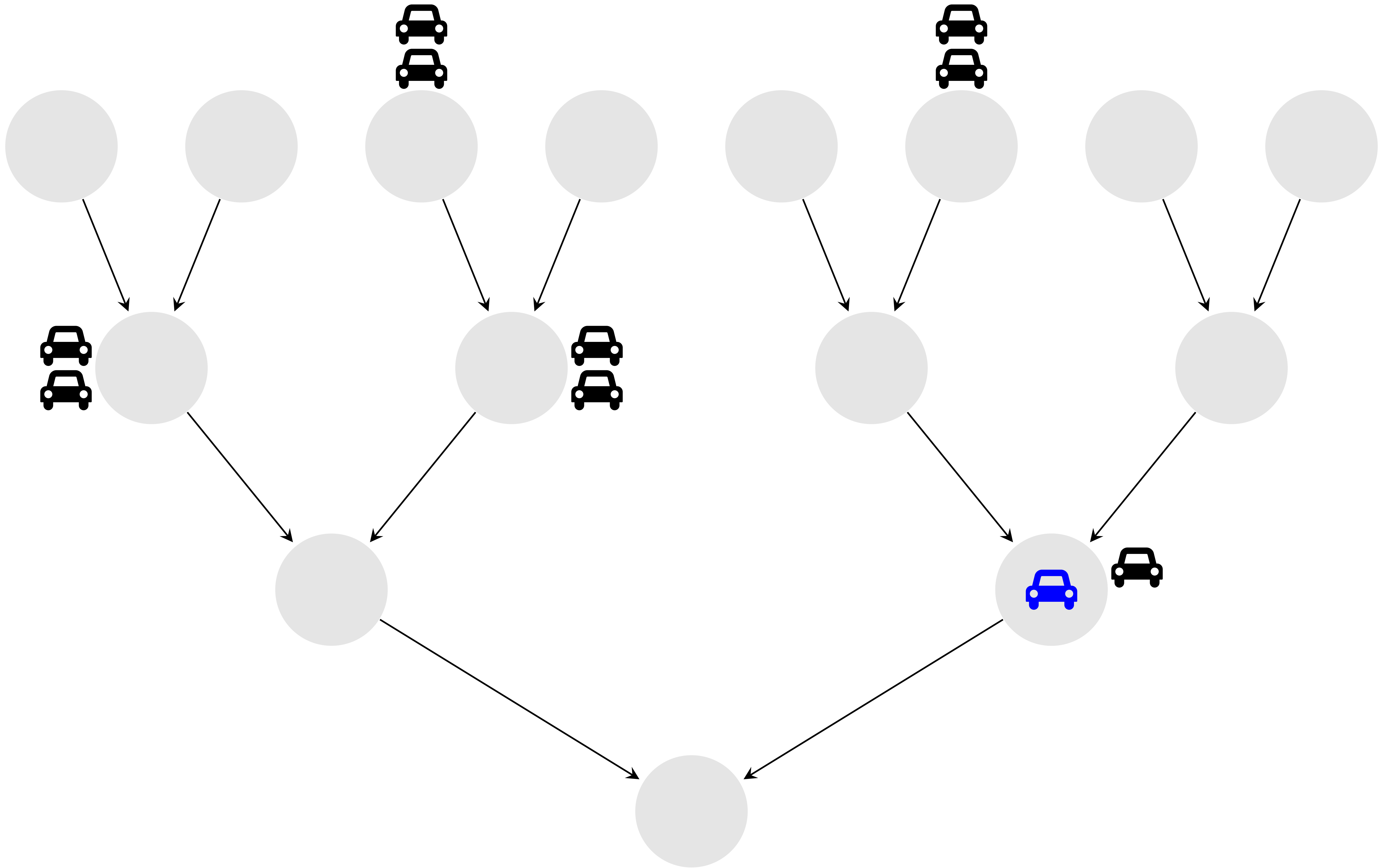
Parking sur un arbre



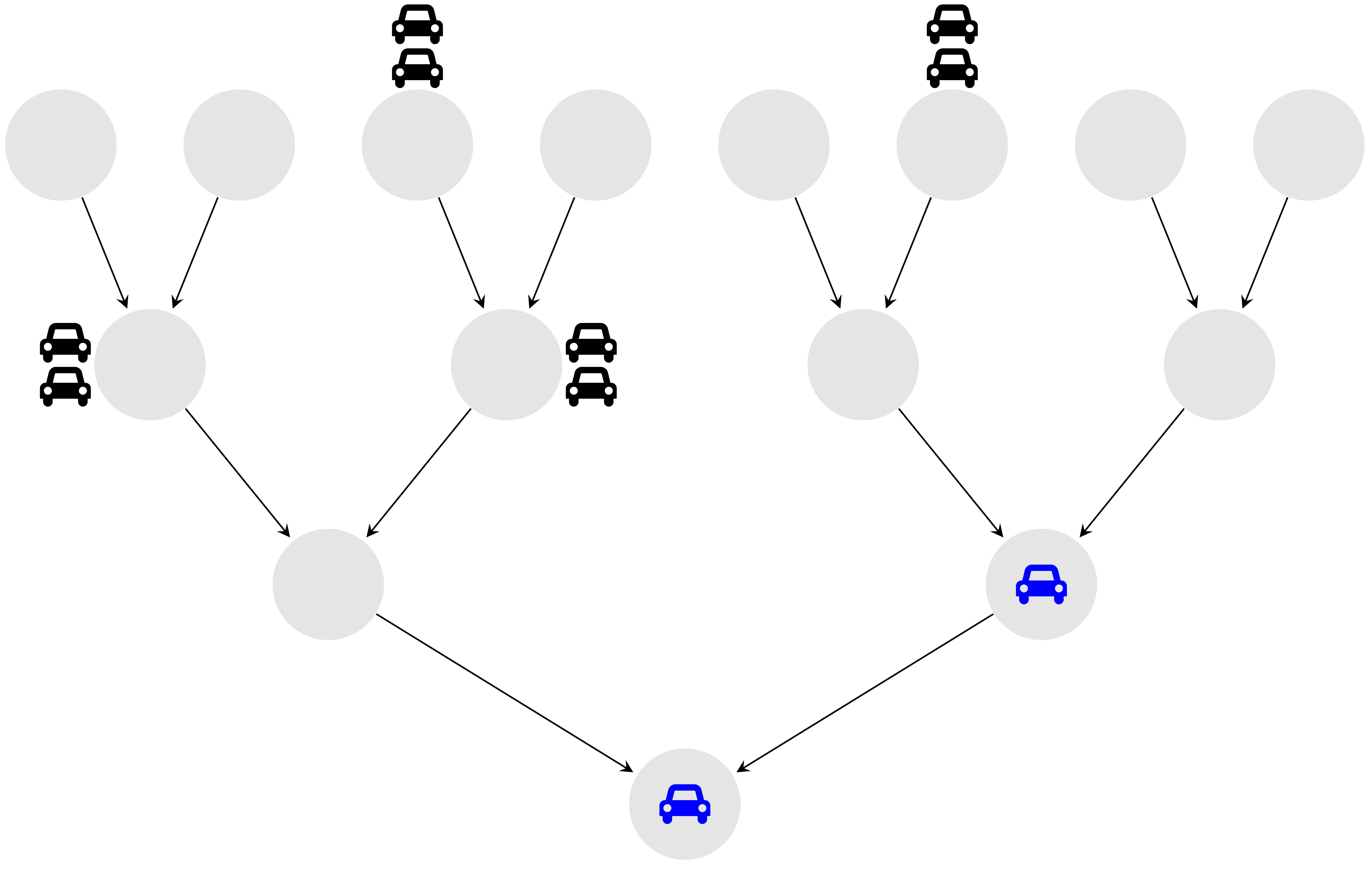
Parking sur un arbre



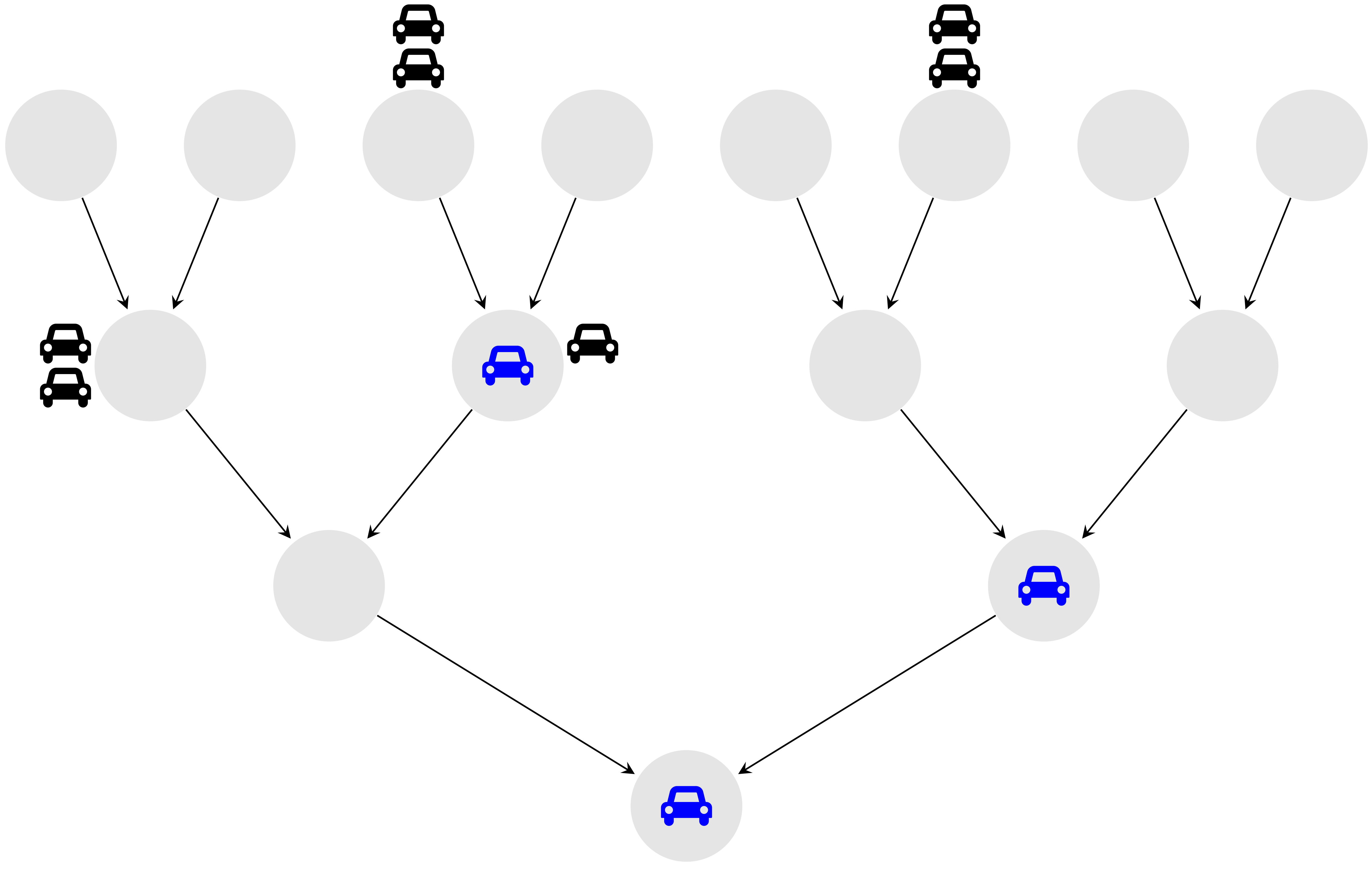
Parking sur un arbre



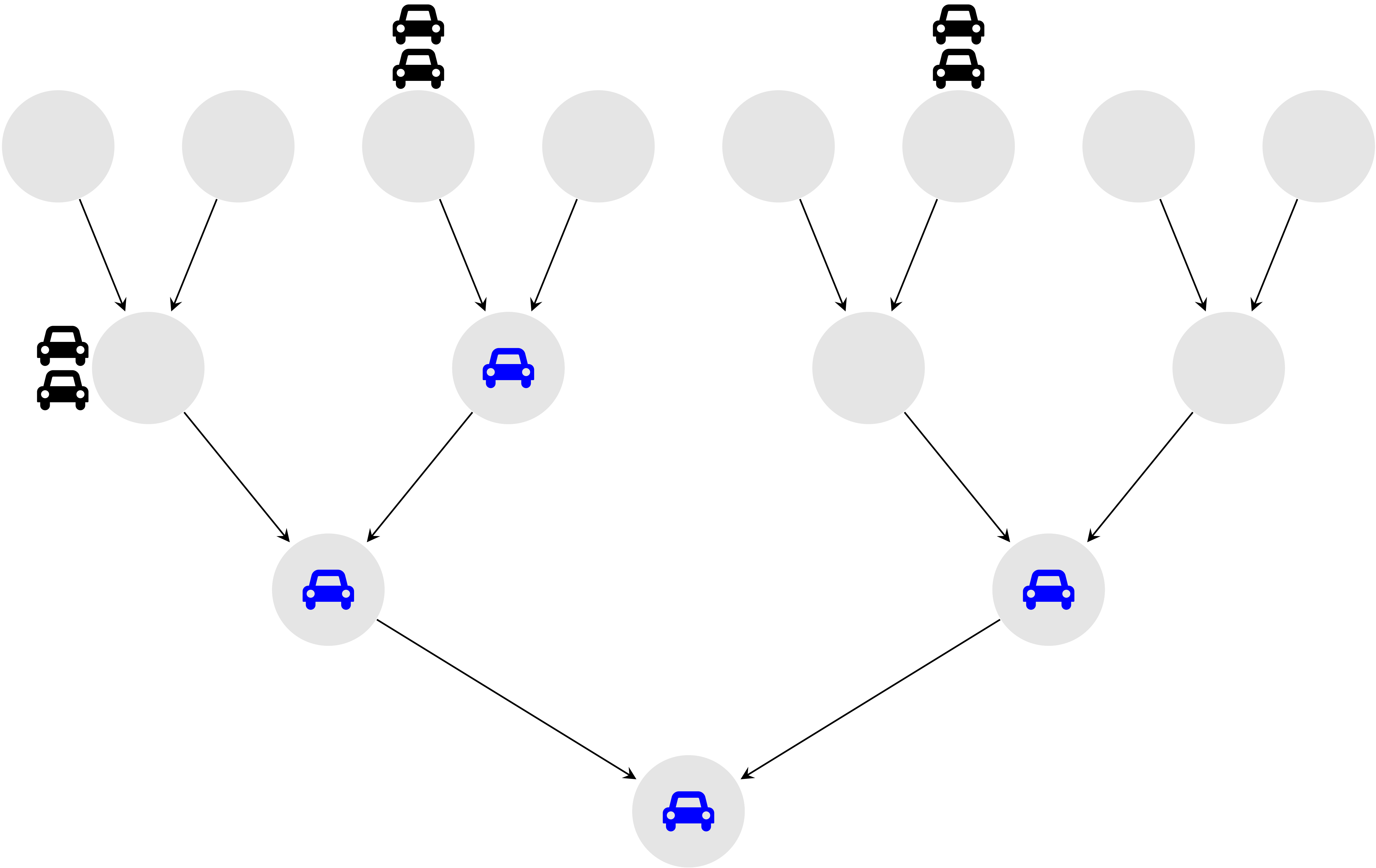
Parking sur un arbre



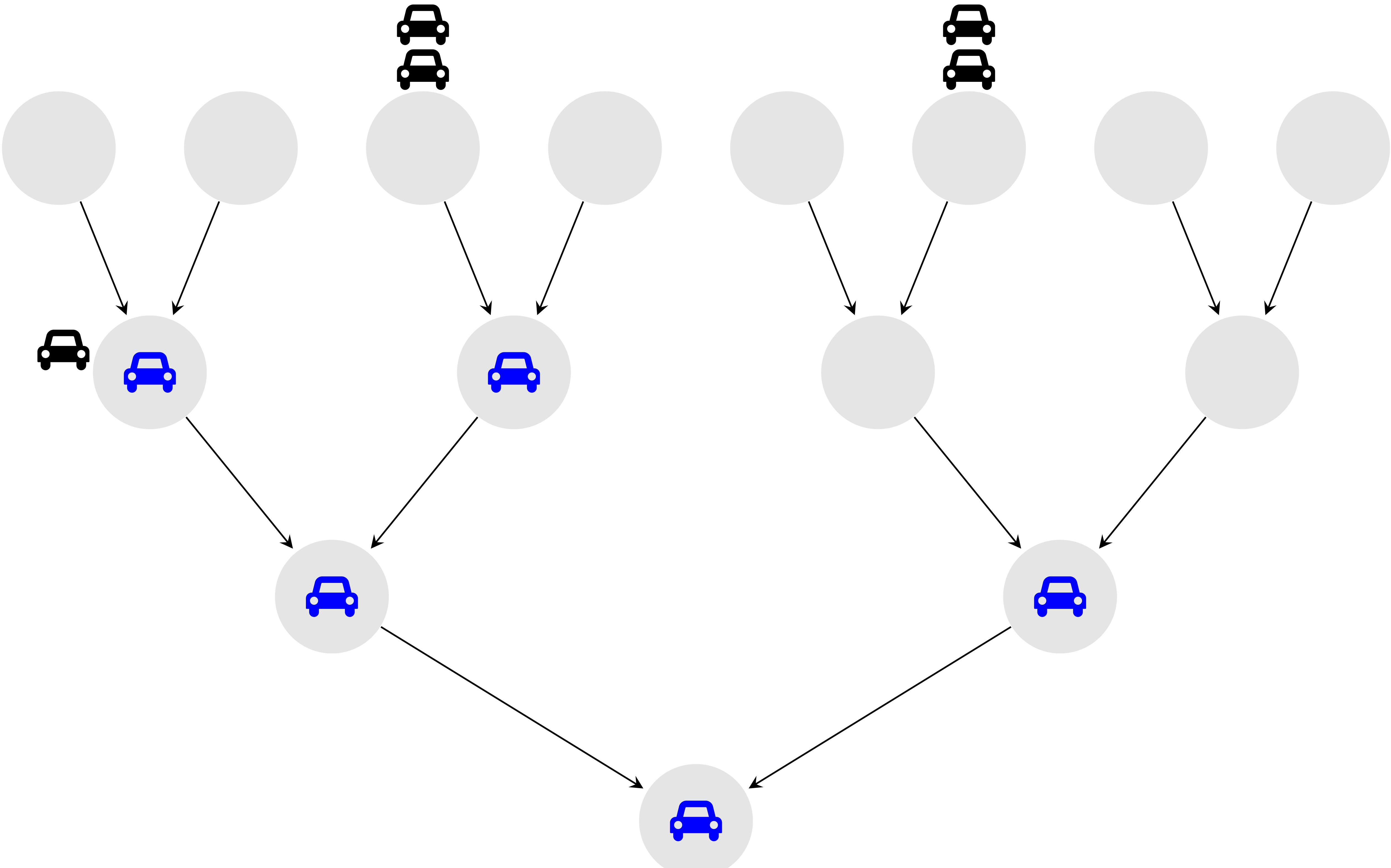
Parking sur un arbre



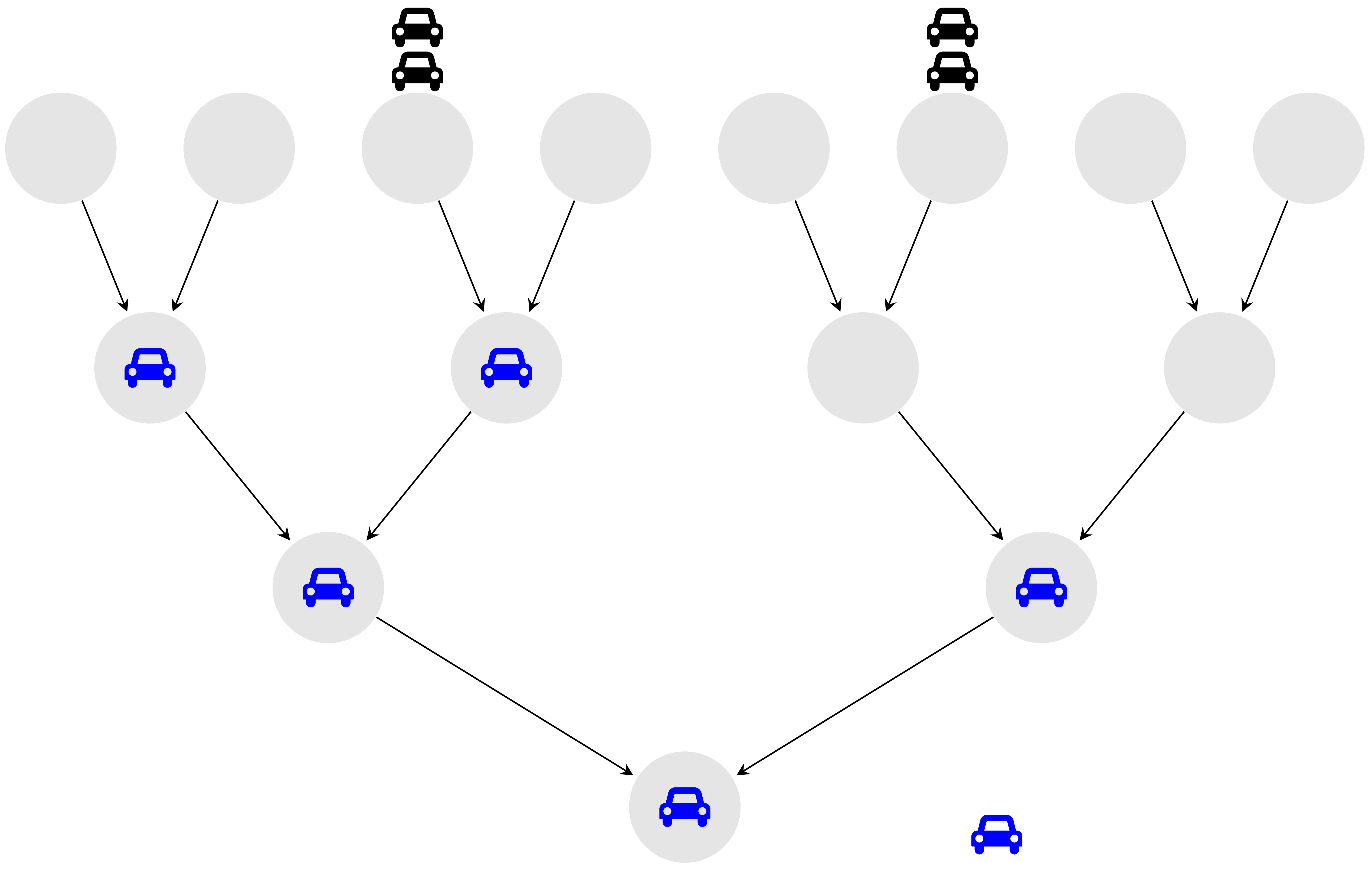
Parking sur un arbre



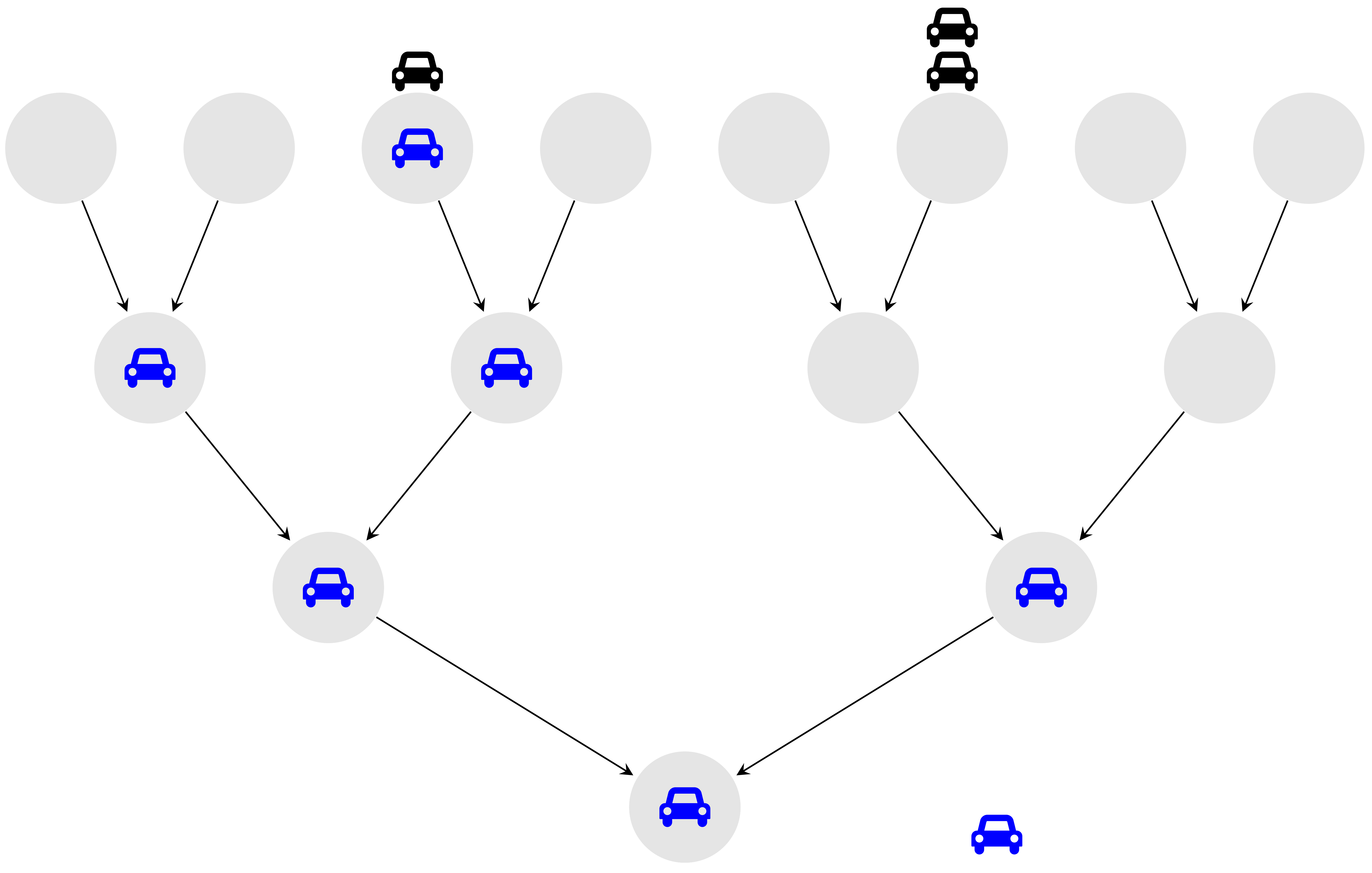
Parking sur un arbre



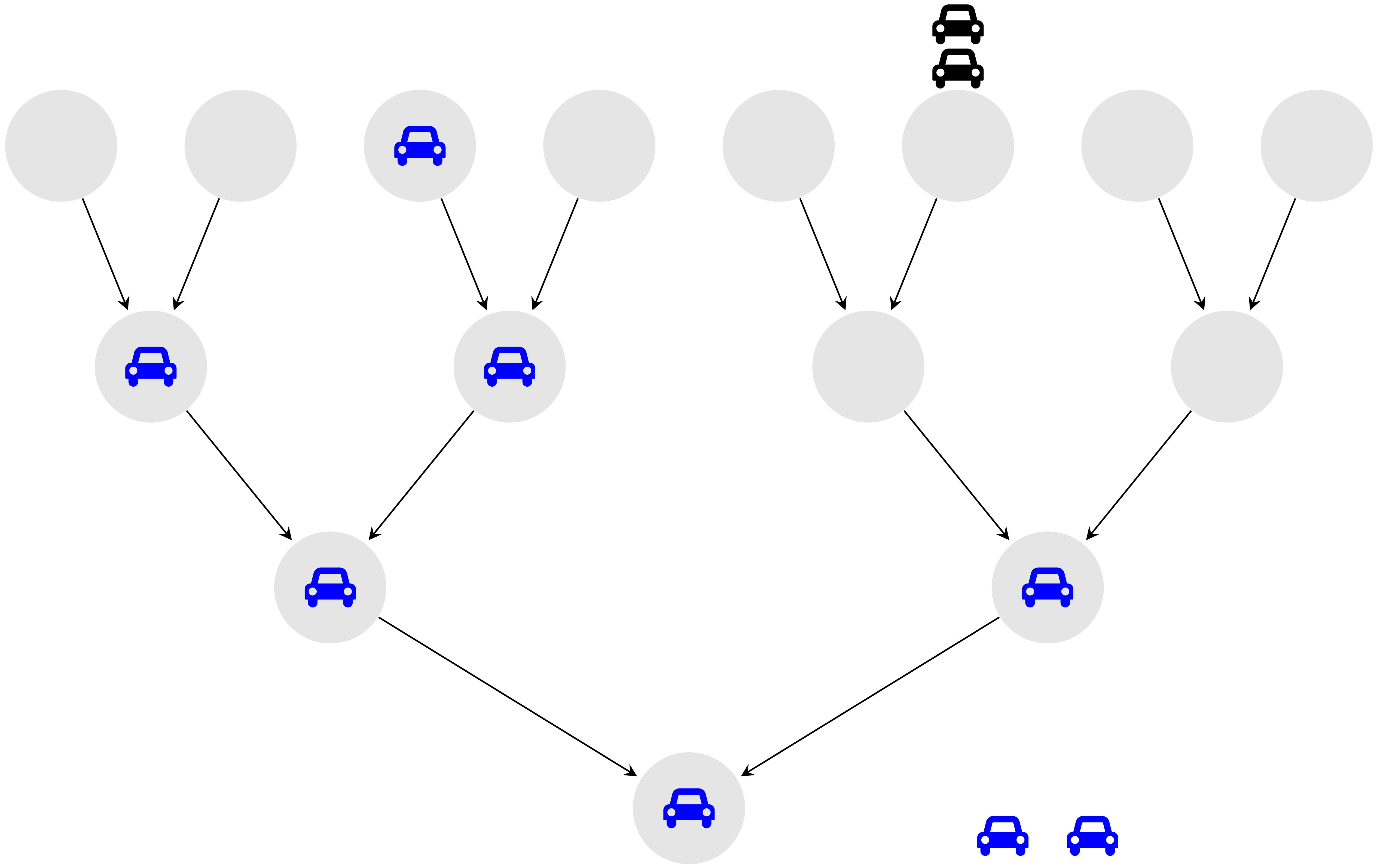
Parking sur un arbre



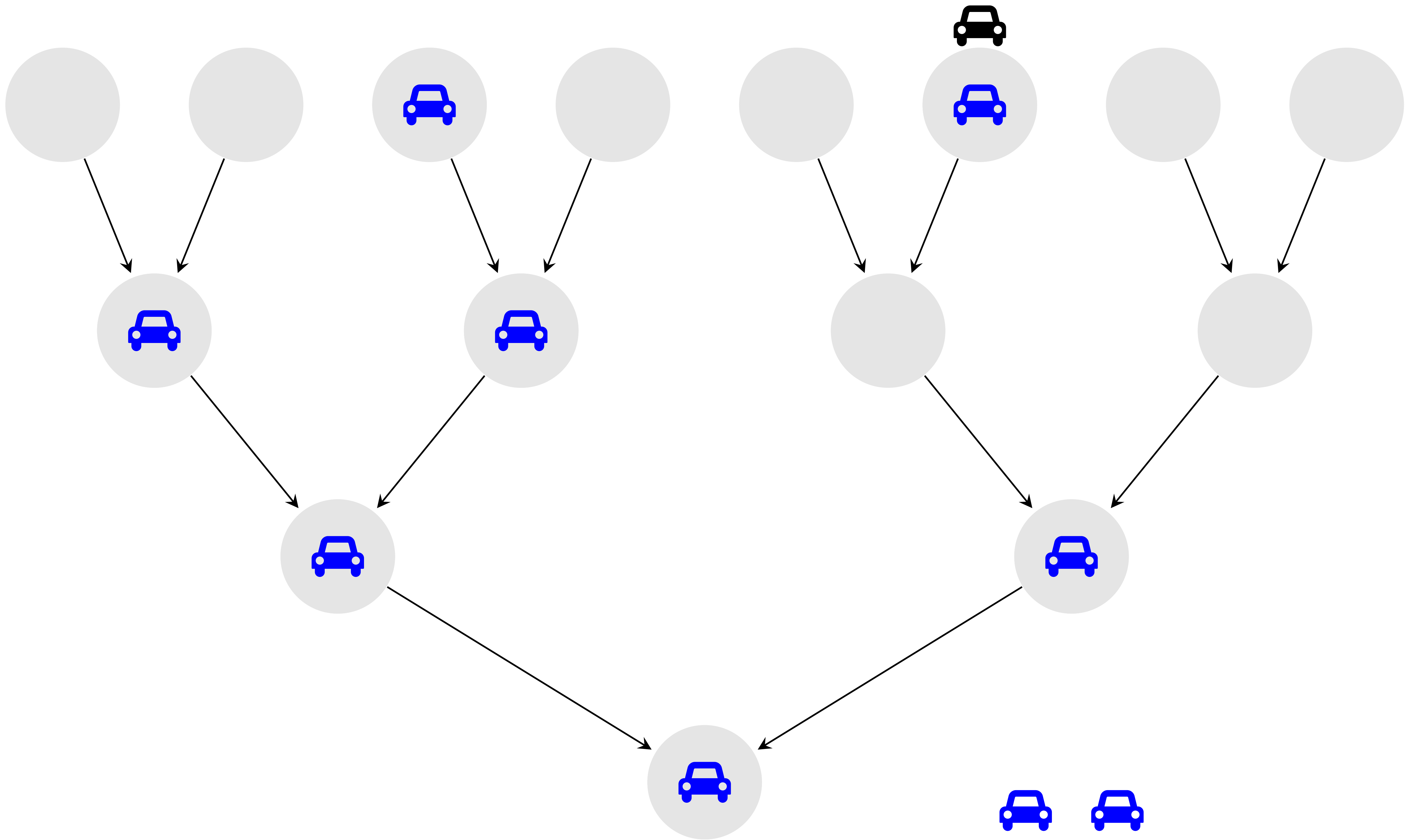
Parking sur un arbre



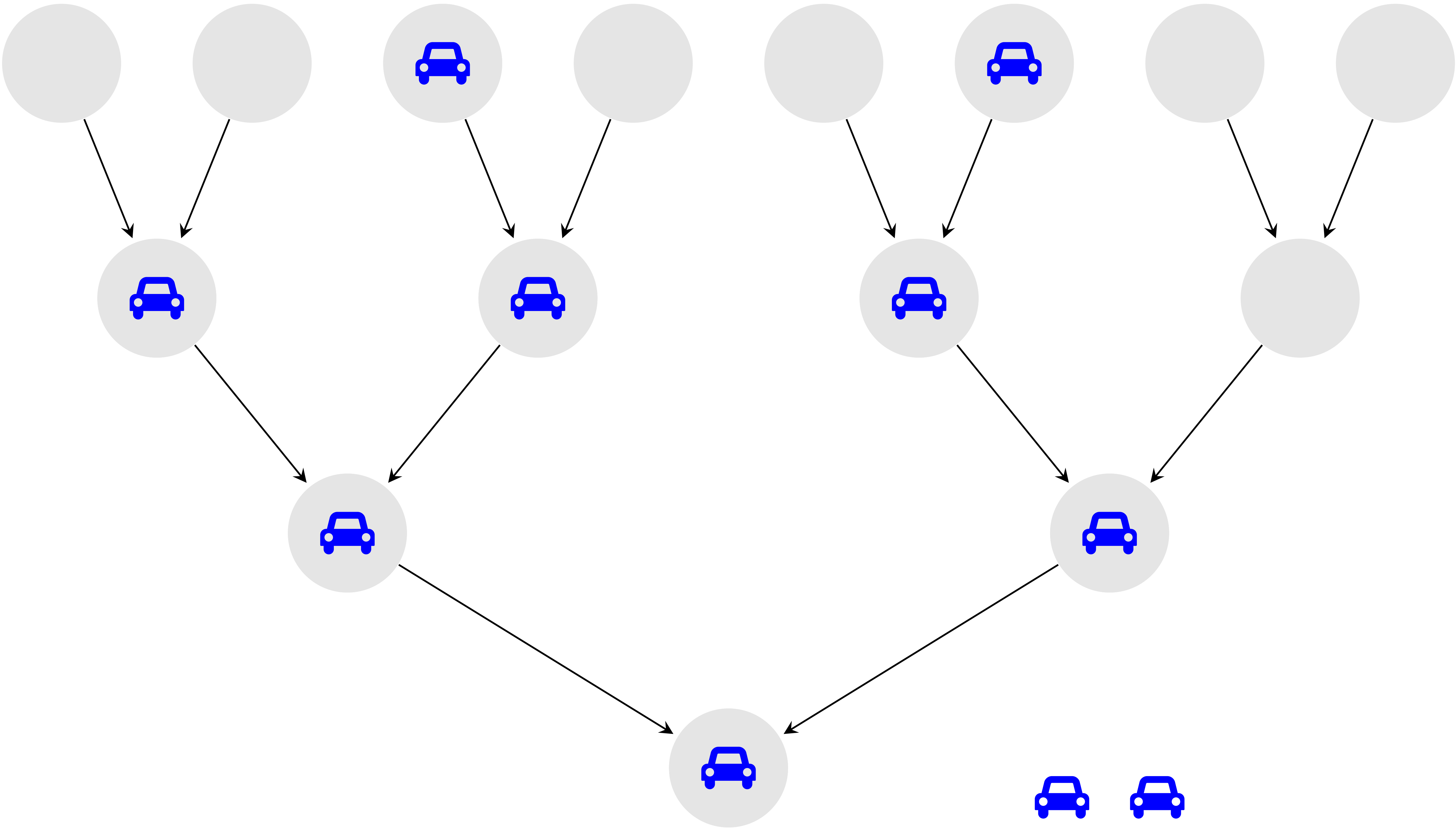
Parking sur un arbre



Parking sur un arbre



Parking sur un arbre

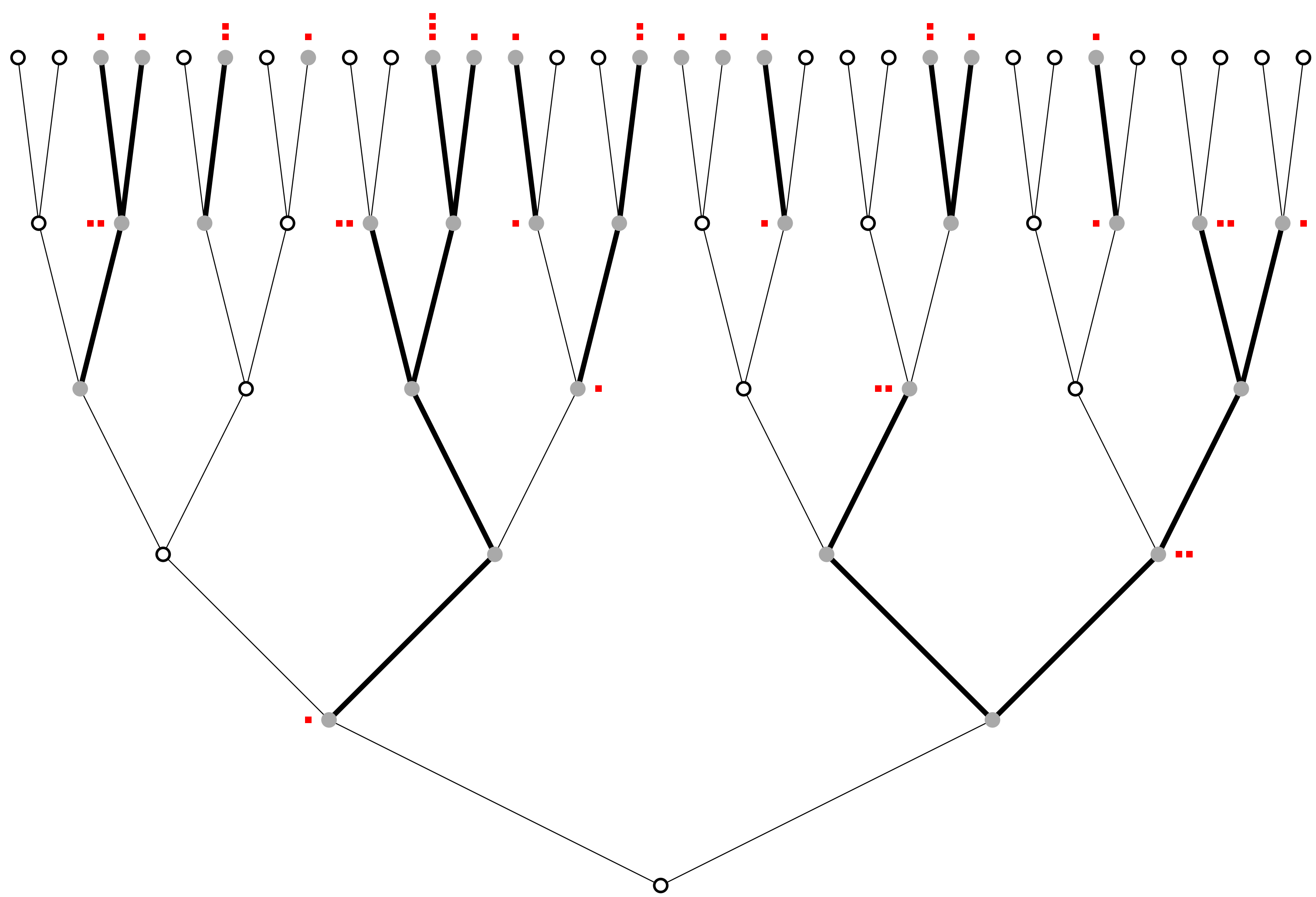


Dans les épisodes précédents...

- 60' : Konheim & Weiss (ligne)
- 2015 : Lackner & Panholzer (nombre de fonctions de parking)
- 2016 : Goldschmidt & Pryzkucki
- 2018 : Jones (arbre binaire critique)
- 2019 : Bahl, Barnett & Junge (bornes), Chen & Goldschmidt, Curien & Hénard (universalité)

Notre modèle

- On se place sur $\mathcal{T} = \mathbb{B}$ l'arbre binaire infini.
- Arrivées de voitures i.i.d. de loi μ. On note G la fonction génératrice de μ
$$G(t) = \sum_{k \geq 0} \mu_k t^k.$$



Transition de phase

$X =$ nombre de voitures qui ne trouvent pas de place.

Transition de phase

$X =$ nombre de voitures qui ne trouvent pas de place.

- **Sous-critique :** $X < \infty$ presque sûrement et même $\mathbb{E}[X] < \infty$.
- **Surcritique :** $X = \infty$.

Transition de phase

$X =$ nombre de voitures qui ne trouvent pas de place.

- **Sous-critique :** $X < \infty$ presque sûrement et même $\mathbb{E}[X] < \infty$.
- **Surcritique :** $X = \infty$.

Exemple et motivation : Famille de lois $(\mu_\alpha : \alpha > 0)$ stochastiquement croissante avec $\mathbb{E}[\mu_\alpha] = \alpha$.

$\longrightarrow$ Transition de phase

Localisation de la transition

Théorème [Aldous, C., Curien, Hénard, 2022]

Supposons qu'il existe

$$t_c = \min\{t \geq 0,\ 2(G(t) - tG'(t))^2 = t^2 G(t) G''(t)\}.$$

Localisation de la transition

Théorème [Aldous, C., Curien, Hénard, 2022]

Supposons qu'il existe

$$t_c = \min\{t \geq 0,\ 2(G(t) - tG'(t))^2 = t^2 G(t) G''(t)\}.$$

Le processus de parking est sous-critique si et seulement si

$$(t_c - 2)G(t_c) \geq t_c(t_c - 1)G'(t_c).$$

Localisation de la transition

Théorème [Aldous, C., Curien, Hénard, 2022]

Supposons qu'il existe

$$t_c = \min\{t \geq 0,\ 2(G(t) - tG'(t))^2 = t^2 G(t) G''(t)\}.$$

Le processus de parking est sous-critique si et seulement si

$$(t_c - 2)G(t_c) \geq t_c(t_c - 1)G'(t_c).$$

En général, le t_c existe.

Conséquences probabilistes

- Pour que le parking soit sous-critique, il faut $t_c > 2$.
- $\mathbb{E}[X] < \infty$ en régime sous-critique,
- Taille des clusters de places occupées ?

Exemples

Arrivées de voitures	Valeur critique α_c
Binaire $0/2$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{2})\delta_0 + \frac{\alpha}{2}\delta_2$	
Binaire $0/k$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{k})\delta_0 + \frac{\alpha}{k}\delta_k$	
Poisson $G_\alpha(t) = \exp\left(t(a-1)\right)$	
Géométrique $G_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha t}$	

Exemples

Arrivées de voitures	Valeur critique α_c
Binaire $0/2$ $\mu^\alpha = (1-\frac{\alpha}{2})\delta_0 + \frac{\alpha}{2}\delta_2$	$\frac{1}{14}$
Binaire $0/k$ $\mu^\alpha = (1-\frac{\alpha}{k})\delta_0 + \frac{\alpha}{k}\delta_k$	
Poisson $G_\alpha(t) = \exp\left(t(a-1)\right)$	
Géométrique $G_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha t}$	

Exemples

Arrivées de voitures	Valeur critique α_c
Binaire $0/2$ $\mu^\alpha = (1-\frac{\alpha}{2})\delta_0 + \frac{\alpha}{2}\delta_2$	$\frac{1}{14}$
Binaire $0/k$ $\mu^\alpha = (1-\frac{\alpha}{k})\delta_0 + \frac{\alpha}{k}\delta_k$	$\sim \frac{Cste}{2^k k}$
Poisson $G_\alpha(t) = \exp\left(t(a-1)\right)$	
Géométrique $G_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha t}$	

Exemples

Arrivées de voitures	Valeur critique α_c
Binaire $0/2$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{2})\delta_0 + \frac{\alpha}{2}\delta_2$	$\dfrac{1}{14}$
Binaire $0/k$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{k})\delta_0 + \frac{\alpha}{k}\delta_k$	$\sim \dfrac{Cste}{2^k k}$
Poisson $G_\alpha(t) = \exp\left(t(a-1)\right)$	$3 - 2\sqrt{2}$
Géométrique $G_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha t}$	

Exemples

Arrivées de voitures	Valeur critique α_c
Binaire $0/2$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{2})\delta_0 + \frac{\alpha}{2}\delta_2$	$\frac{1}{14}$
Binaire $0/k$ $\mu^\alpha = (1 - \frac{\alpha}{k})\delta_0 + \frac{\alpha}{k}\delta_k$	$\sim \frac{Cste}{2^k k}$
Poisson $G_\alpha(t) = \exp\left(t(a-1)\right)$	$3 - 2\sqrt{2}$
Géométrique $G_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha-\alpha t}$	$\frac{1}{8}$

Idées de preuve

- Décomposition de la configuration finale en clusters d'arbres de places occupées,
- Prérequis : énumération des *Fully parked trees*.

Idées de preuve

- Décomposition de la configuration finale en clusters d'arbres de places occupées,
- Prérequis : énumération des *Fully parked trees*.

On note $p_\circ$ la probabilité que la racine soit vide,

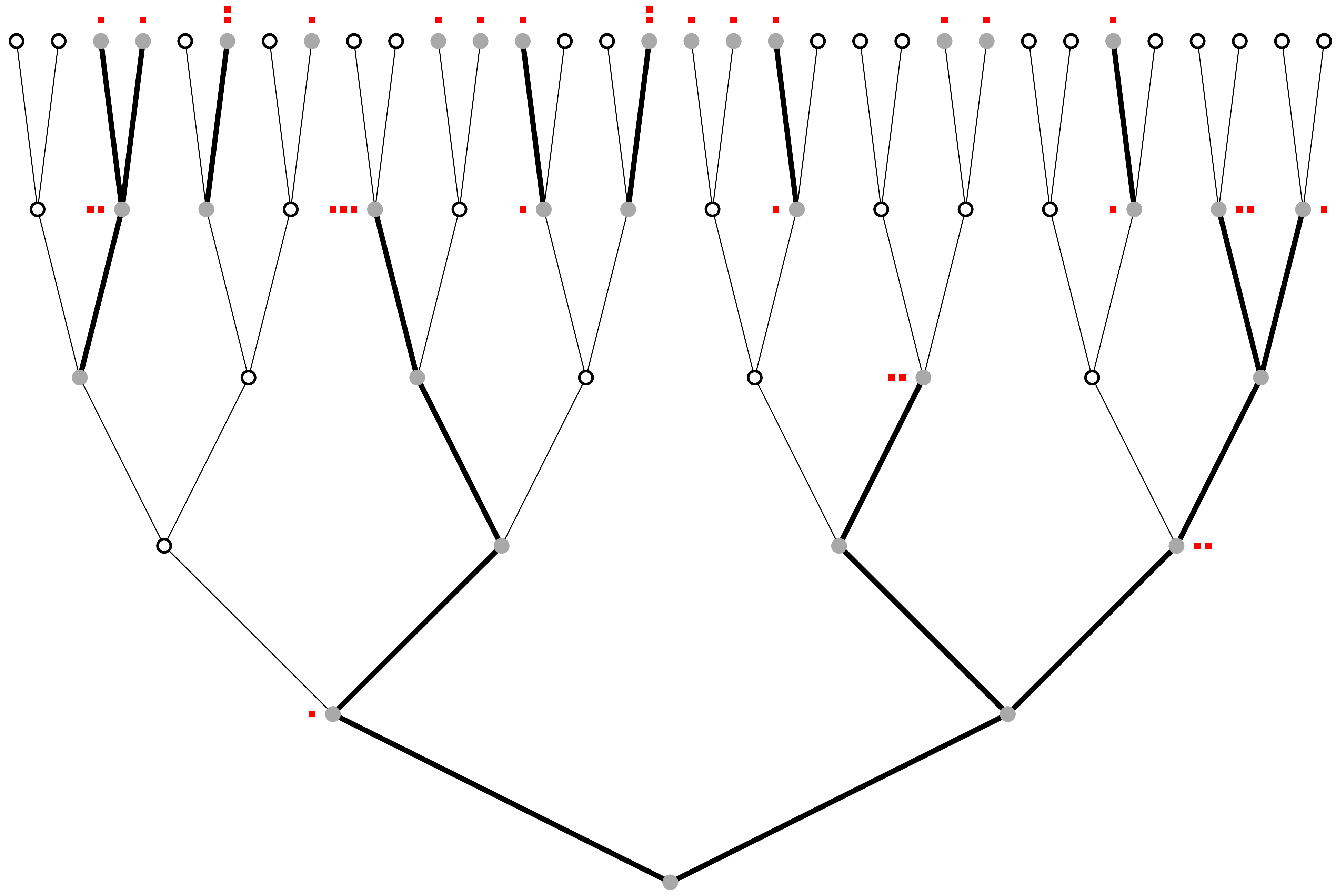
Idées de preuve

- Décomposition de la configuration finale en clusters d'arbres de places occupées,
- Prérequis : énumération des *Fully parked trees*.

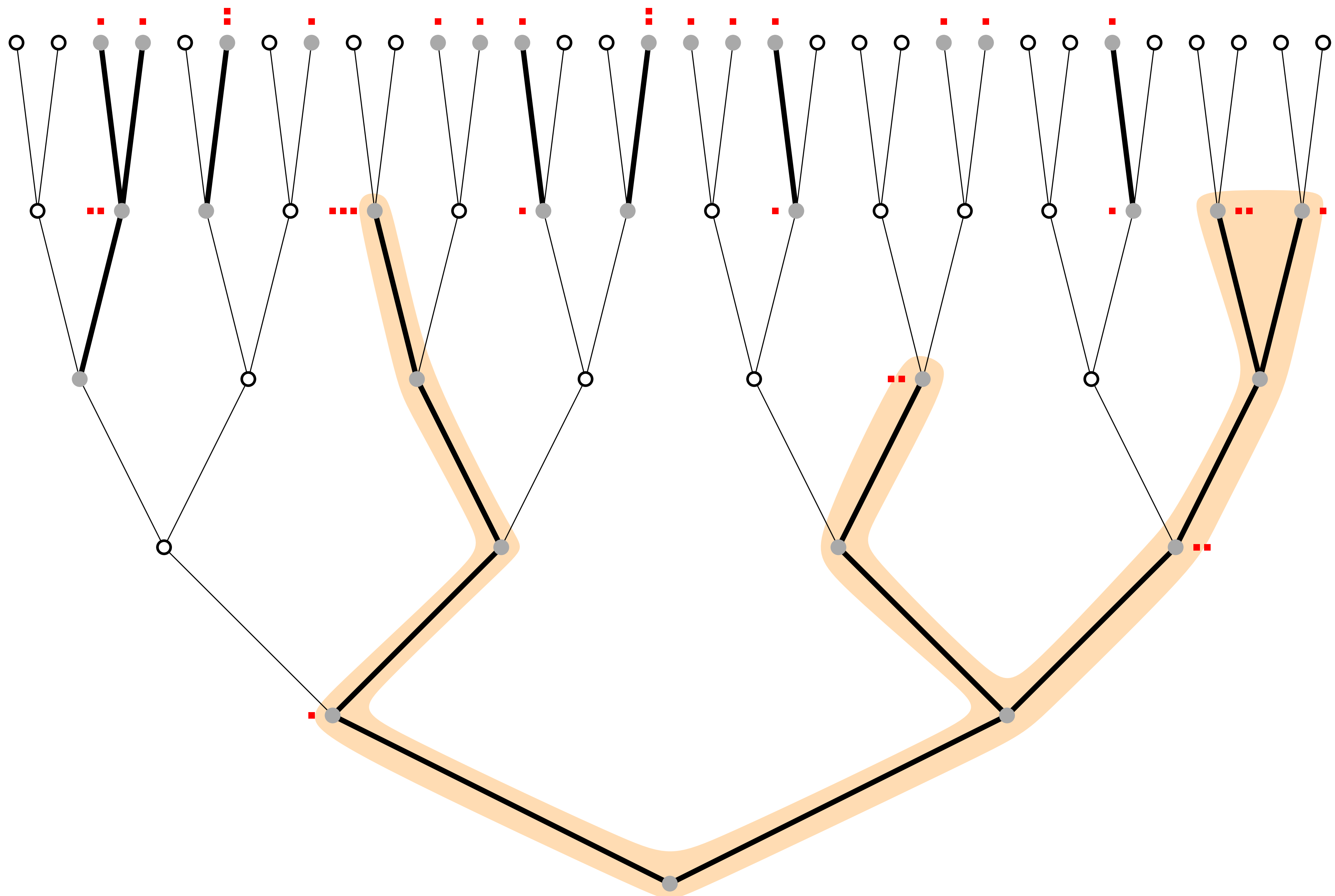
On note $p_\circ$ la probabilité que la racine soit vide, et

$$p_\bullet = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et la racine est occupée}).$$

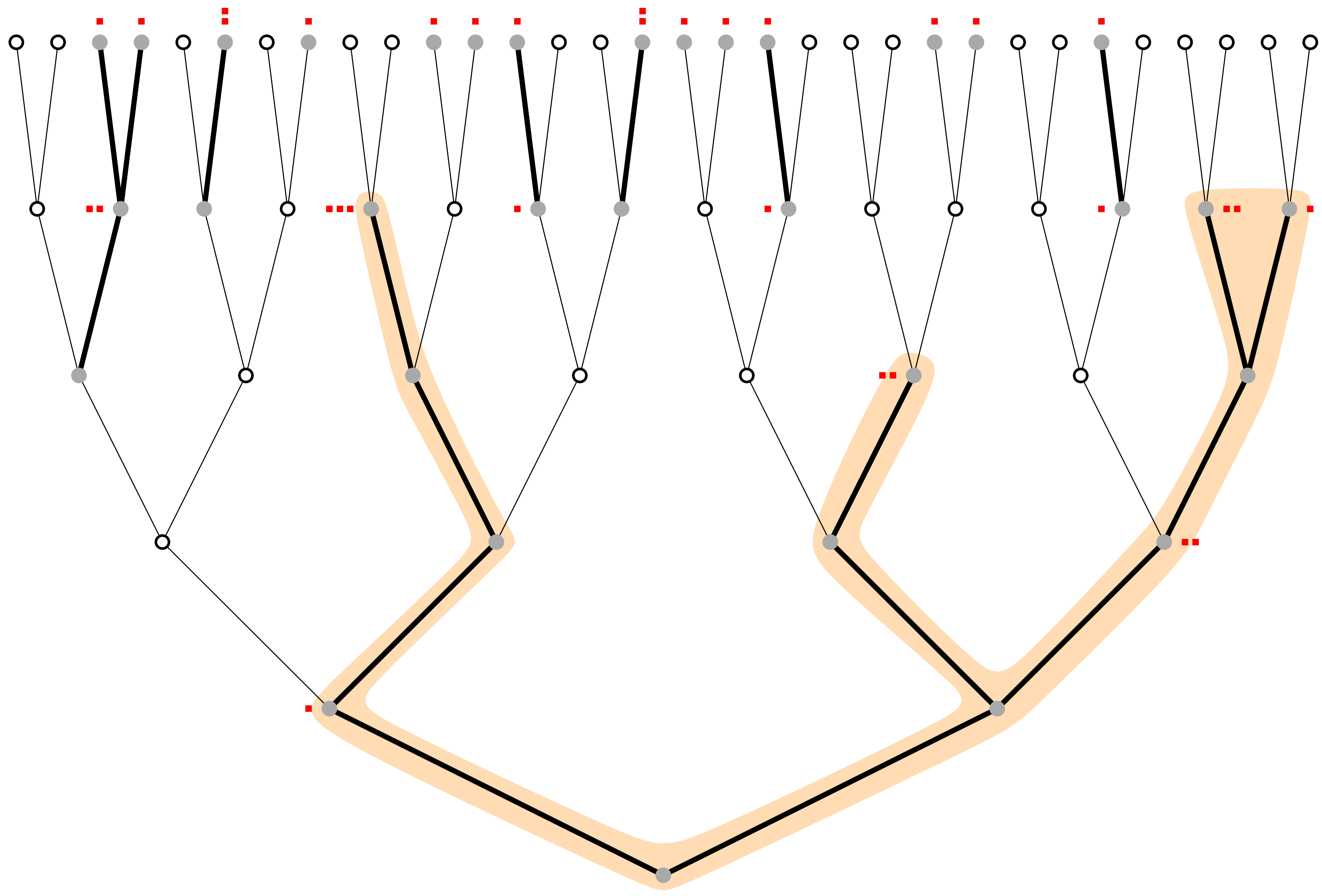
Décomposition en clusters



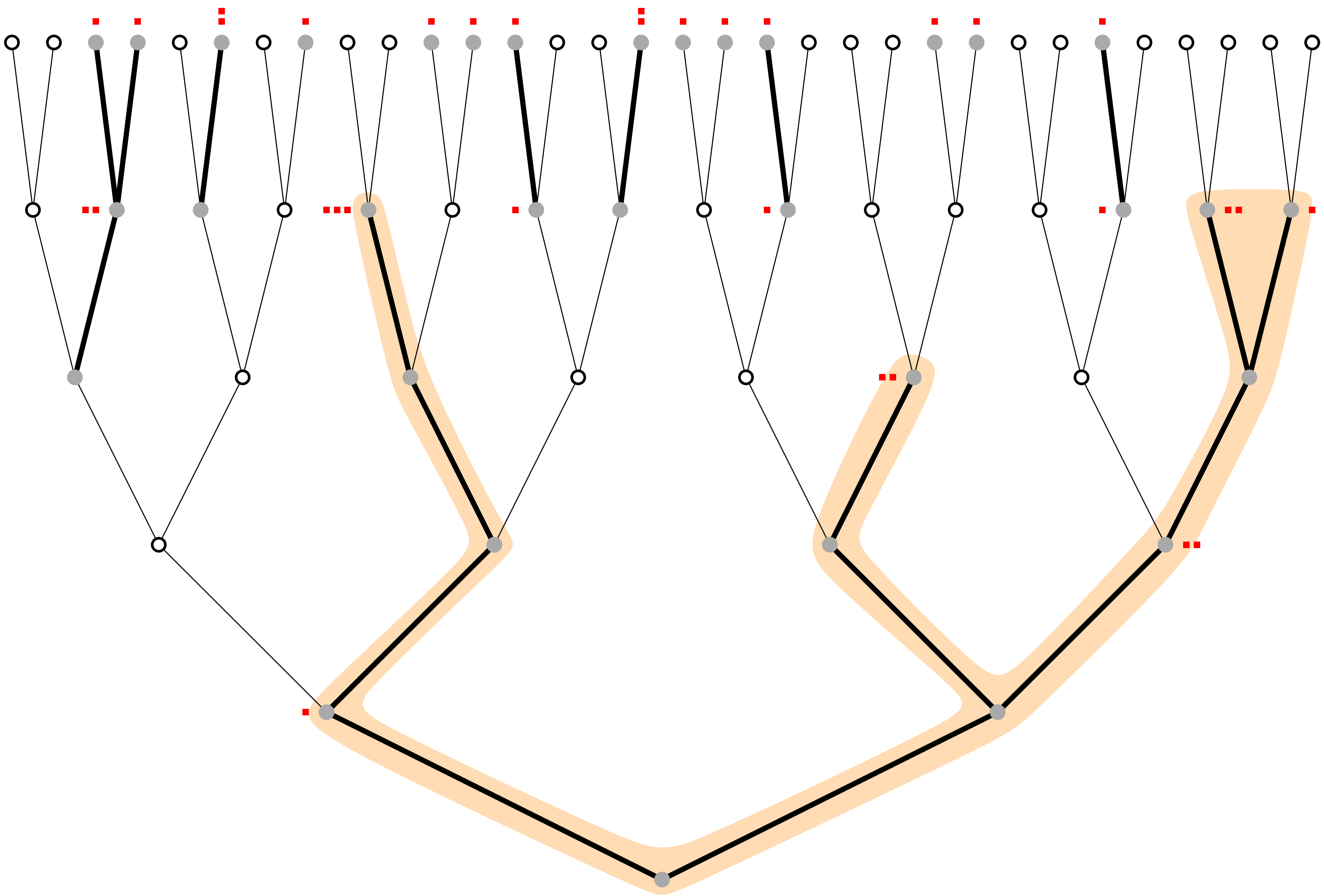
Décomposition en clusters



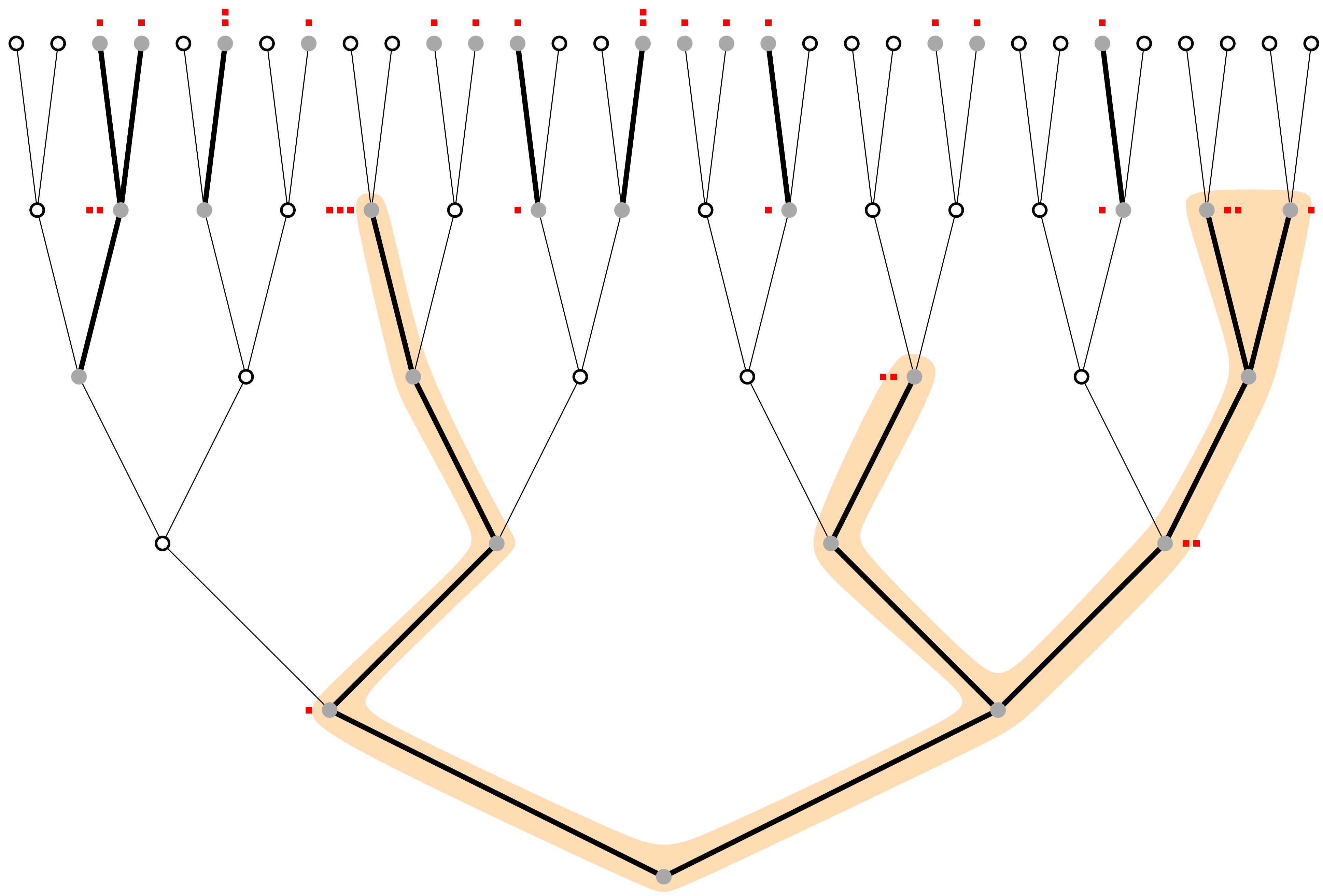
Décomposition en clusters



Décomposition en clusters



Décomposition en clusters



Caractérisation du régime sous-critique

$$F(x,y) = \sum_{n\geq 1} \sum_{p\geq 0} \sum_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}_n^p} w(\mathbf{t}) x^n y^p$$

Le modèle de parking est sous-critique ssi il existe une solution positive à

$$1 = \mu_0 x (1 + F(x,0))^2$$

Caractérisation du régime sous-critique

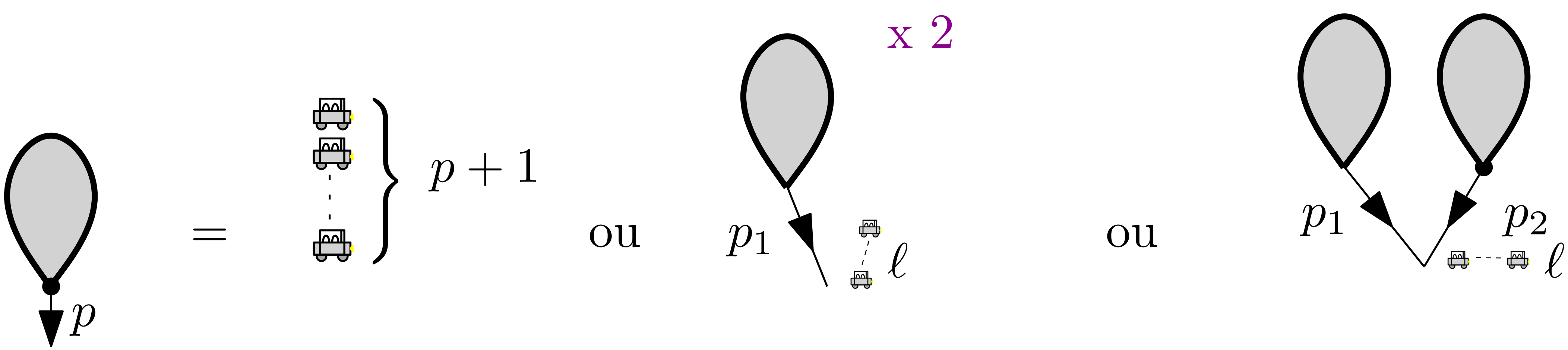
$$F(x, y) = \sum_{n\geq 1} \sum_{p\geq 0} \sum_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}_n^p} w(\mathbf{t}) x^n y^p$$

Le modèle de parking est sous-critique ssi à x_c rayon de convergence de F

$$1 \leq \mu_0 x_c (1 + F(x_c, 0))^2$$

Énumération des *FPT* : décomposition “à la Tutte”

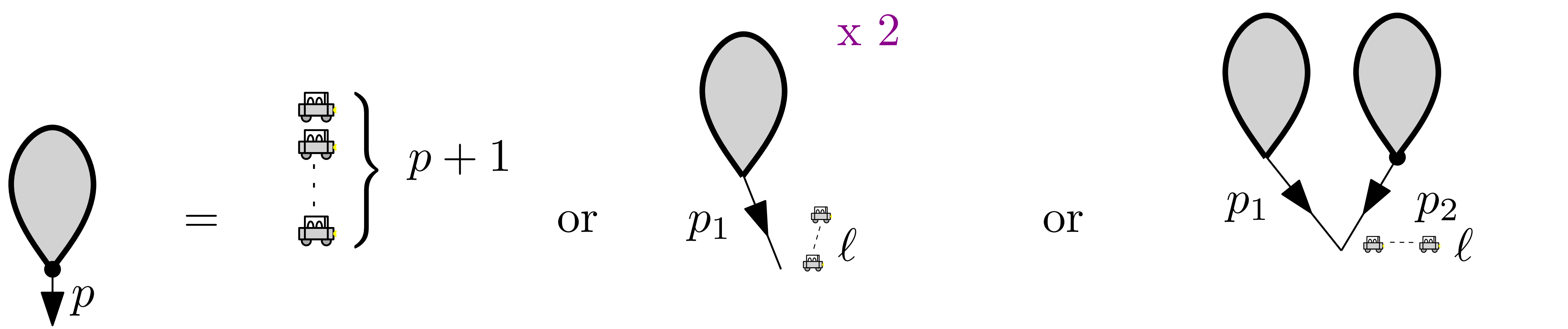
$$F(x,y) = \sum_{n\geq 1} \sum_{p\geq 0} \sum_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}_n^p} w(\mathbf{t}) x^n y^p$$



$p = p_1 + \ell - 1$ $\qquad$ $p = p_1 + p_2 + \ell - 1$

Énumération des *FPT* : décomposition “à la Tutte”

$$F(x,y) = \sum_{n\geq 1}\sum_{p\geq 0}\sum_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}_n^p} w(\mathbf{t})x^n y^p$$



$p = p_1 + \ell - 1$ $\qquad$ $p = p_1 + p_2 + \ell - 1$

$$\begin{aligned} F(x,y) = &\ \frac{x}{y}G(y) + 2\frac{x}{y}F(x,y)G(y) + \frac{x}{y}F(x,y)^2G(y) \\ &- \frac{x}{y}G(0) - 2\frac{x}{y}F(x,0)G(0) - \frac{x}{y}F(x,0)^2G(0) \end{aligned}$$

Résolution : Méthode du noyau (Bousquet-Mélou–Jehanne)

L'équation de Tutte se réécrit

$$P(\mathrm{F}(x,y), \mathrm{F}(x,0), x, y) = 0$$

avec P polynôme.

Résolution : Méthode du noyau (Bousquet-Mélou–Jehanne)

L'équation de Tutte se réécrit

$$P(\mathsf{F}(x,y), \mathsf{F}(x,0), x, y) = 0$$

avec P polynôme.

Idée-clé: Chercher $Y = Y(x)$ tel que

$$\partial_f P(\mathsf{F}(x, Y(x)), \mathsf{F}_0(x), x, Y(x)) = 0,$$

car on a aussi

$$\partial_y P(\mathsf{F}(x, Y(x)), \mathsf{F}_0(x), x, Y(x)) = 0.$$

Trois équations :

$$\begin{cases} Y - 2x\mathrm{F}G(Y) = 0, \\ 1 + xG'(Y)\mathrm{F}^2 = \mathrm{F}, \\ Y + xG(Y)\mathrm{F}^2 = Y\mathrm{F} + xG(0)\mathrm{F}_0^2 \end{cases}$$

Trois équations :

$$\begin{cases} Y - 2x\mathrm{F}G(Y) = 0, \\ 1 + xG'(Y)\mathrm{F}^2 = \mathrm{F}, \\ Y + xG(Y)\mathrm{F}^2 = Y\mathrm{F} + xG(0)\mathrm{F}_0^2 \end{cases}$$

On obtient

$$x = \frac{Y(2G(Y) - YG'(Y))}{4G(Y)^2} \text{ et } \mathrm{F}_0(x) = \frac{2G(Y)\sqrt{G(Y) - YG'(Y)}}{(2G(Y) - YG'(Y))\sqrt{G(0)}}$$

Trois équations :

$$\begin{cases} Y - 2x\mathrm{F}G(Y) = 0, \\ 1 + xG'(Y)\mathrm{F}^2 = \mathrm{F}, \\ Y + xG(Y)\mathrm{F}^2 = Y\mathrm{F} + xG(0)\mathrm{F}_0^2 \end{cases}$$

On obtient

$$x = \frac{Y(2G(Y) - YG'(Y))}{4G(Y)^2} \text{ et } \mathrm{F}_0(x) = \frac{2G(Y)\sqrt{G(Y) - YG'(Y)}}{(2G(Y) - YG'(Y))\sqrt{G(0)}}$$

On en déduit x_c et $\mathrm{F}_0(x_c)$ en fonction de $Y(x_c)$.

Perspectives

- Cas des arbres de BGW surcritiques : universalité ?
- Lien des modèles de parking avec les modèles de graphes aléatoires et de cartes aléatoires.

Merci !