

Percolation et percolation de premier passage

Journées MAS 2022

Barbara Dembin

Thèse sous la direction de Marie Théret.

ETH Zürich

Introduction des modèles

Introduction des modèles

Percolation

Percolation

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(B_p(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Percolation

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(B_p(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- Si $B_p(e) = 1$, on dit que l'arête e est ouverte, sinon on dit qu'elle est fermée.

Percolation

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(B_p(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- Si $B_p(e) = 1$, on dit que l'arête e est ouverte, sinon on dit qu'elle est fermée.

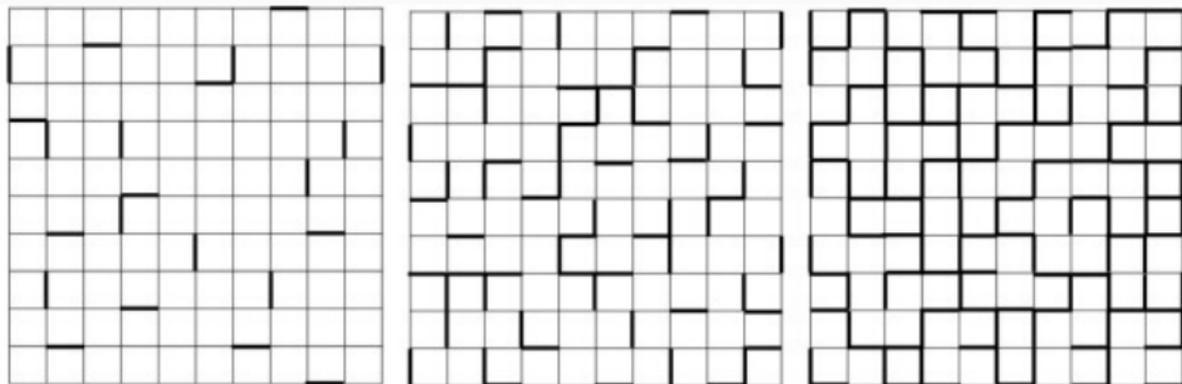


Figure 1: Paramètres $p = 0.1$, $p = 0.3$, $p = 0.6$

Probabilité de percolation

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Probabilité de percolation

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Définition (Probabilité de percolation)

$$\forall p \in [0, 1] \quad \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty).$$

Probabilité de percolation

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Définition (Probabilité de percolation)

$$\forall p \in [0, 1] \quad \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty).$$

- $\theta(0) = 0$.

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Définition (Probabilité de percolation)

$$\forall p \in [0, 1] \quad \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty).$$

- $\theta(0) = 0$.
- $\theta(1) = 1$.

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Définition (Probabilité de percolation)

$$\forall p \in [0, 1] \quad \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty).$$

- $\theta(0) = 0$.
- $\theta(1) = 1$.
- $p \mapsto \theta(p)$ est croissante.

- Graphe aléatoire $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : B_p(e) = 1\})$.
- $\mathcal{C}_p(0)$: composante connexe de 0 dans \mathcal{G}_p .

Définition (Probabilité de percolation)

$$\forall p \in [0, 1] \quad \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_p(0)| = \infty).$$

- $\theta(0) = 0$.
- $\theta(1) = 1$.
- $p \mapsto \theta(p)$ est croissante.

Preuve: Couplage standard avec des uniformes $U(e) \sim \mathcal{U}([0, 1])$,
 $B_p(e) = \mathbf{1}_{U(e) \leq p}$. Pour $p < q$, on a $B_p(e) \leq B_q(e)$.

Définition (Paramètre critique)

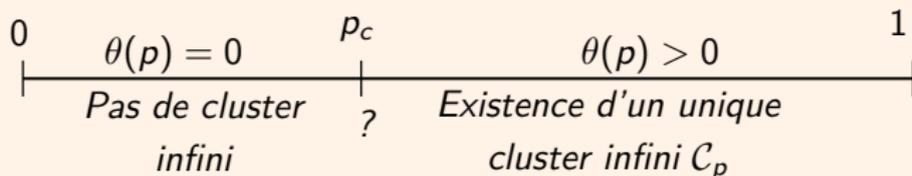
$$p_c = \sup \{ p : \theta(p) = 0 \} .$$

Définition (Paramètre critique)

$$p_c = \sup \{ p : \theta(p) = 0 \} .$$

Transition de phase à $p_c \in]0, 1[$:

Théorème (Broadbendt-Hammersley 57-59,...)



Introduction des modèles

Percolation de premier passage

Percolation de premier passage

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variables aléatoire distribué selon une distribution G à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Percolation de premier passage

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variables aléatoire distribué selon une distribution G à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Deux interprétations:

- $t(e)$: temps pour traverser $e \in \mathbb{E}^d$.

- Graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $d \geq 2$.
- $(t(e))_{e \in \mathbb{E}^d}$: famille i.i.d. de variables aléatoire distribué selon une distribution G à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Deux interprétations:

- $t(e)$: temps pour traverser $e \in \mathbb{E}^d$.
- $t(e)$: capacité de $e \in \mathbb{E}^d$.

Percolation de premier passage: première interprétation

Définition de la constante de temps

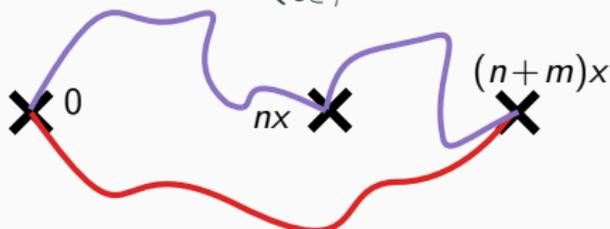
Pseudo-métrique aléatoire T :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d \quad T(x, y) = \inf \left\{ \sum_{e \in \gamma} t(e) : \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y \right\}.$$

Définition de la constante de temps

Pseudo-métrique aléatoire T :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d \quad T(x, y) = \inf \left\{ \sum_{e \in \gamma} t(e) : \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y \right\}.$$



$$\text{Sous-additivité: } T(0, (n+m)x) \leq T(0, nx) + \underbrace{T(nx, (n+m)x)}_{\stackrel{\text{loi}}{=} T(0, mx)}.$$

Définition de la constante de temps

Pseudo-métrique aléatoire T :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d \quad T(x, y) = \inf \left\{ \sum_{e \in \gamma} t(e) : \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y \right\}.$$



$$\text{Sous-additivité: } T(0, (n+m)x) \leq T(0, nx) + \underbrace{T(nx, (n+m)x)}_{\stackrel{\text{loi}}{=} T(0, mx)}.$$

Théorème (Hammersley-Welsh 65, Kingman 73-75)

Sous des conditions d'intégrabilité de G , on a

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nx)}{n} = \mu_G(x) \text{ p.s. et dans } L^1$$

où $\mu_G(x)$ est une constante déterministe. C'est la constante de temps.

$G_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_\infty$ for $p \in [0, 1]$. Notons T_p la pseudo-métrie correspondant à la distribution G_p .

Lien entre percolation de premier passage et percolation

$G_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_\infty$ for $p \in [0, 1]$. Notons T_p la pseudo-métrie correspondant à la distribution G_p .

Définissons $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : t(e) = 1\})$.

$G_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_\infty$ for $p \in [0, 1]$. Notons T_p la pseudo-métrie correspondant à la distribution G_p .

Définissons $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : t(e) = 1\})$.

La distance de graphe entre x et y dans \mathcal{G}_p est égale à $T_p(x, y)$, i.e.,

$$T_p(x, y) = \inf \{|\gamma| : \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } \mathcal{G}_p\} .$$

Lien entre percolation de premier passage et percolation

$G_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_\infty$ for $p \in [0, 1]$. Notons T_p la pseudo-métrie correspondant à la distribution G_p .

Définissons $\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{E}^d : t(e) = 1\})$.

La distance de graphe entre x et y dans \mathcal{G}_p est égale à $T_p(x, y)$, i.e.,

$$T_p(x, y) = \inf \{|\gamma| : \gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } \mathcal{G}_p\} .$$

Par analogie, on dit que e est p -ouverte si $t(e) = 1$ et p -fermée sinon.

Régularité de μ_{G_p} en p ?

Regularité de μ_{G_p} en p ?

Théorème (Cox 81, ..., Garet-Marchand-Proccacia-Théret 17)

La fonction $G \mapsto \mu_G$ est continue.

Regularité de μ_{G_p} en p ?

Théorème (Cox 81, ..., Garet-Marchand-Proccacia-Théret 17)

La fonction $G \mapsto \mu_G$ est continue.

$G_p = p\delta_1 + (1 - p)\delta_\infty$ for $p \in [0, 1]$.

Théorème (Cerf-D. 22)

Soit $p_0 > p_c$, il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de p_0) telle que

$$\forall p, q \in [p_0, 1] \quad \sup_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} |\mu_{G_p}(x) - \mu_{G_q}(x)| \leq C|q - p|.$$

Idée de la preuve

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

Idée de la preuve

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

Par le couplage : $T_q(0, nx) \leq T_p(0, nx)$ et donc $\mu_{G_q}(x) \leq \mu_{G_p}(x)$.

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

Par le couplage : $T_q(0, nx) \leq T_p(0, nx)$ et donc $\mu_{G_q}(x) \leq \mu_{G_p}(x)$.

Soit γ q -ouvert tel que $|\gamma| = T_q(0, nx)$. Le chemin γ contient des arêtes p -fermées.

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

Par le couplage : $T_q(0, nx) \leq T_p(0, nx)$ et donc $\mu_{G_q}(x) \leq \mu_{G_p}(x)$.

Soit γ q -ouvert tel que $|\gamma| = T_q(0, nx)$. Le chemin γ contient des arêtes p -fermées.

On a

$$\mathbb{P}(e \text{ } p\text{-fermée} | e \text{ } q\text{-ouverte}) = \mathbb{P}(U(e) > p | U(e) < q) = \frac{q - p}{q}.$$

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

Par le couplage : $T_q(0, nx) \leq T_p(0, nx)$ et donc $\mu_{G_q}(x) \leq \mu_{G_p}(x)$.

Soit γ q -ouvert tel que $|\gamma| = T_q(0, nx)$. Le chemin γ contient des arêtes p -fermées.

On a

$$\mathbb{P}(e \text{ } p\text{-fermée} | e \text{ } q\text{-ouverte}) = \mathbb{P}(U(e) > p | U(e) < q) = \frac{q - p}{q}.$$

Le nombre d'arêtes p -fermées est de l'ordre de $|\gamma|(q - p)$.

Soient $p_c < p < q$ et $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut prouver que

$$|\mu_{G_q}(x) - \mu_{G_p}(x)| \leq C_0(q - p).$$

On a $\mu_{G_q}(x) \approx \frac{T_q(0, nx)}{n}$ et $\mu_{G_p}(x) \approx \frac{T_p(0, nx)}{n}$.

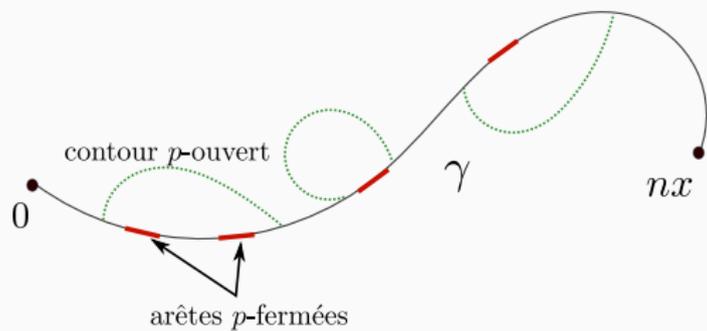
Par le couplage : $T_q(0, nx) \leq T_p(0, nx)$ et donc $\mu_{G_q}(x) \leq \mu_{G_p}(x)$.

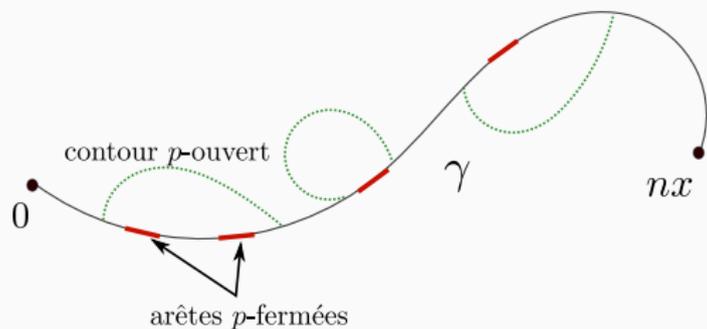
Soit γ q -ouvert tel que $|\gamma| = T_q(0, nx)$. Le chemin γ contient des arêtes p -fermées.

On a

$$\mathbb{P}(e \text{ } p\text{-fermée} | e \text{ } q\text{-ouverte}) = \mathbb{P}(U(e) > p | U(e) < q) = \frac{q - p}{q}.$$

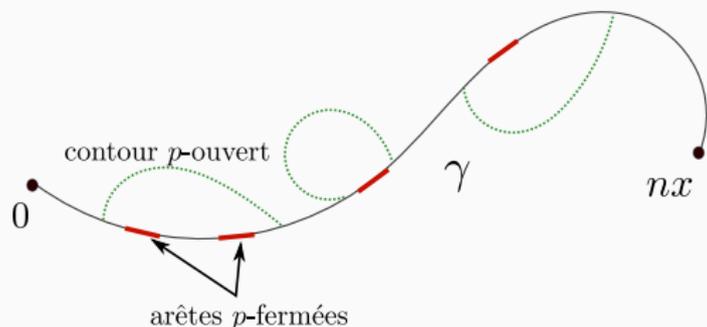
Le nombre d'arêtes p -fermées est de l'ordre de $|\gamma|(q - p)$.





But: Construire γ' p -ouvert tel que $|\gamma' \setminus \gamma|$ est petit, alors

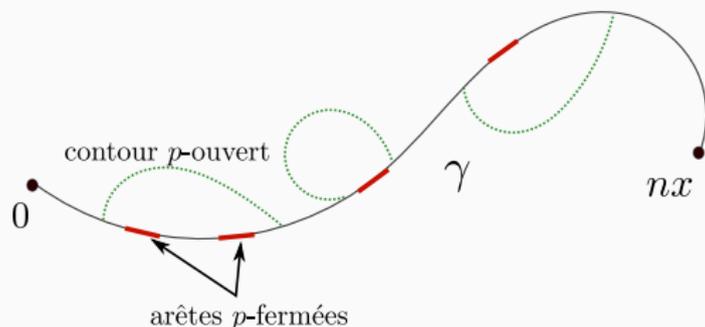
$$T_p(0, nx) \leq |\gamma'| \leq |\gamma| + |\gamma' \setminus \gamma| \leq T_q(0, nx) + |\gamma' \setminus \gamma|.$$



But: Construire γ' p -ouvert tel que $|\gamma' \setminus \gamma|$ est petit, alors

$$T_p(0, nx) \leq |\gamma'| \leq |\gamma| + |\gamma' \setminus \gamma| \leq T_q(0, nx) + |\gamma' \setminus \gamma|.$$

Nous prouvons que le coût moyen pour contourner une arête sur la géodésique est inférieur à une constante C avec grande probabilité.



But: Construire γ' p -ouvert tel que $|\gamma' \setminus \gamma|$ est petit, alors

$$T_p(0, nx) \leq |\gamma'| \leq |\gamma| + |\gamma' \setminus \gamma| \leq T_q(0, nx) + |\gamma' \setminus \gamma|.$$

Nous prouvons que le coût moyen pour contourner une arête sur la géodésique est inférieur à une constante C avec grande probabilité.

On a donc $|\gamma' \setminus \gamma| \leq C(q - p)|\gamma|$. Et

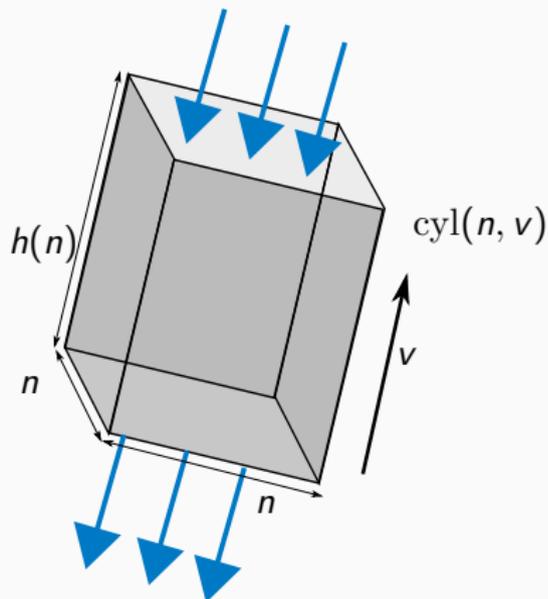
$$\mu_p(x) \leq \mu_q(x) + C(q - p).$$

Percolation de premier passage: Seconde interprétation

Courant dans un cylindre

$t(e)$: capacité de e .

- $v \in \mathbb{S}^{d-1}$
- $\text{cyl}(n, v)$: cylindre dont la base est un hypercarré normal à v de côté n , et de hauteur $h(n)$, pour $n \geq 1$



Définition (Courant admissible dans $\text{cyl}(n, \nu)$)

$f : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un courant admissible si

- $f = 0$ hors de $\text{cyl}(n, \nu)$
- $\forall e \in \mathbb{E}^d \quad |f(e)| \leq t(e)$
- La loi des noeuds est respectée partout excepté à l'entrée et à la sortie du cylindre.

Définition (Courant admissible dans $\text{cyl}(n, \nu)$)

$f : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un courant admissible si

- $f = 0$ hors de $\text{cyl}(n, \nu)$
- $\forall e \in \mathbb{E}^d \quad |f(e)| \leq t(e)$
- La loi des noeuds est respectée partout excepté à l'entrée et à la sortie du cylindre.

$$\text{flow}(n, \nu) = \sup \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité d'eau entrant par le haut pour } f: \\ f \text{ courant admissible dans } \text{cyl}(n, \nu) \end{array} \right\}$$

Constante de flux

Théorème (Grimmett-Kesten 84, Kesten 87, . . . , Rossignol-Théret 18)

Soit $h(n)$ tel que $\log n \ll h(n) \ll n$, on a

$$\forall v \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \frac{\text{flow}(n, v)}{n^{d-1}} \rightarrow \nu_G(v) \text{ p.s.}$$

où $\nu_G(v)$ est une constante déterministe. Il s'agit de la constante de flux.

Constante de flux

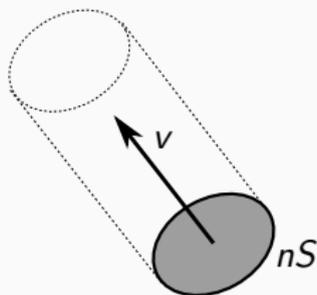
Théorème (Grimmett-Kesten 84, Kesten 87, . . . , Rossignol-Théret 18)

Soit $h(n)$ tel que $\log n \ll h(n) \ll n$, on a

$$\forall v \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \frac{\text{flow}(n, v)}{n^{d-1}} \rightarrow \nu_G(v) \text{ p.s.}$$

où $\nu_G(v)$ est une constante déterministe. Il s'agit de la constante de flux.

$\nu_G(v)$: la quantité moyenne maximale d'eau qui peut circuler dans la direction v par unité de surface et de temps.



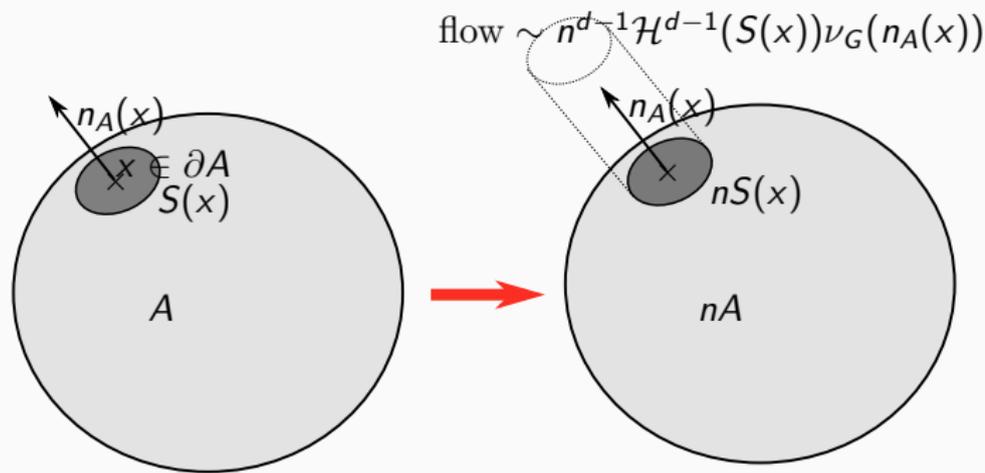
$$\text{flow} \sim n^{d-1} \mathcal{H}^{d-1}(S) \nu_G(v)$$

Flux d'un compact convexe vers l'infini

Soit A un compact convexe de \mathbb{R}^d . A représente une source d'eau.
Quelle est la quantité maximale d'eau que A peut envoyer à l'infini ?

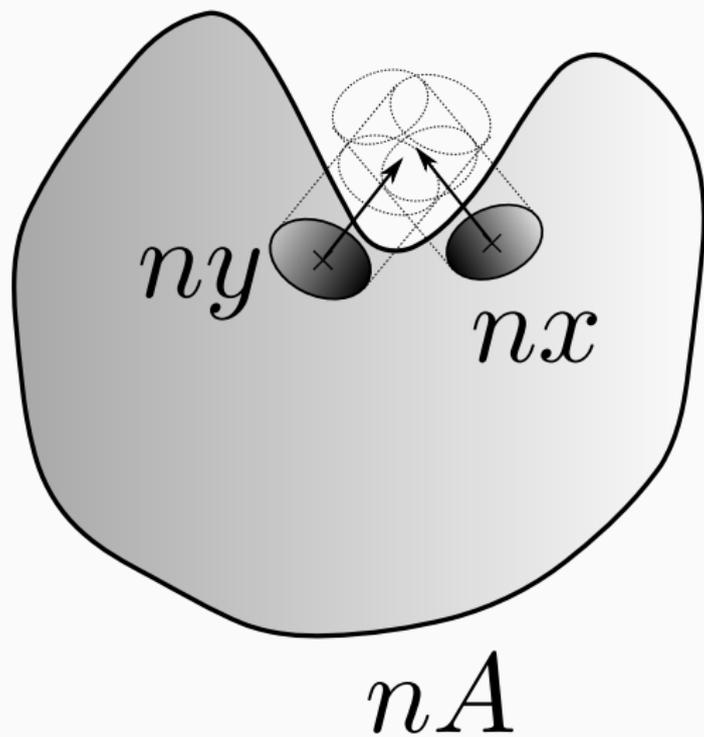
Flux d'un compact convexe vers l'infini

Soit A un compact convexe de \mathbb{R}^d . A représente une source d'eau.
Quelle est la quantité maximale d'eau que A peut envoyer à l'infini ?



Flux de nA vers l'infini $\text{flow}(nA) \sim n^{d-1} \int_{\partial A} \nu_G(n_A(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$.

Pourquoi A doit-il être convexe ?



$\mathcal{C}(A)$: capacité continue de la frontière de A .

$$\mathcal{C}(A) = \int_{\partial A} \nu_G(n_A(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

$\mathcal{C}(A)$: capacité continue de la frontière de A .

$$\mathcal{C}(A) = \int_{\partial A} \nu_G(n_A(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

Le résultat suivant a été prouvé en 2008 par Garet en $d = 2$ et conjecturé pour les dimensions supérieures.

Théorème (D. 20)

Soit $d \geq 3$. Si G admet un moment exponentiel, soit $\epsilon > 0$, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{\text{flow}(nA)}{n^{d-1}} - \mathcal{C}(A) \right| > \epsilon \right) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1}).$$

- La preuve des déviations par au-dessus, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \geq (1 + \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

suit les mêmes idées que la preuve de Garet.

- La preuve des déviations par au-dessus, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \geq (1 + \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

suit les mêmes idées que la preuve de Garet.

- La preuve des déviations par en-dessous, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \leq (1 - \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

est la partie difficile.

- La preuve des déviations par au-dessus, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \geq (1 + \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

suit les mêmes idées que la preuve de Garet.

- La preuve des déviations par en-dessous, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \leq (1 - \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

est la partie difficile.

But: Localiser une région où le flux est anormalement faible.

- La preuve des déviations par au-dessus, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \geq (1 + \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

suit les mêmes idées que la preuve de Garet.

- La preuve des déviations par en-dessous, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(\text{flow}(nA) \leq (1 - \epsilon)\mathcal{C}(A)n^{d-1}) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1})$$

est la partie difficile.

But: Localiser une région où le flux est anormalement faible.

Principales difficultés : Pas de compacité, pas d'estimées combinatoires possibles..

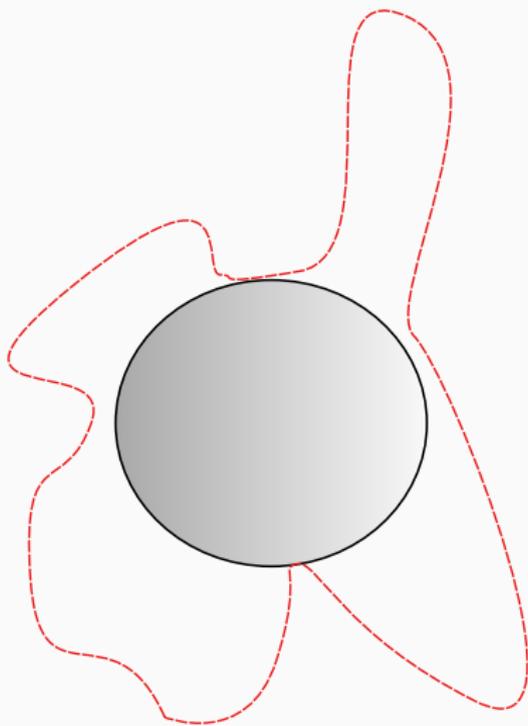


Figure 2: La surface en rouge limite le flux, toutes ces arêtes sont saturées.

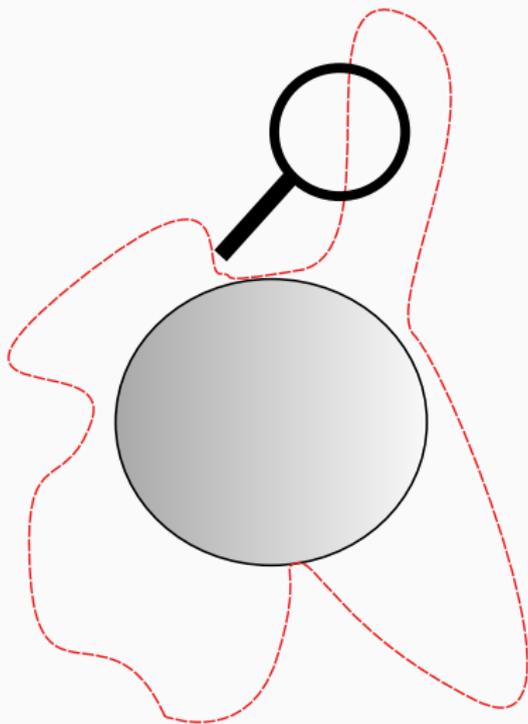


Figure 3: La surface en rouge limite le flux, toutes ces arêtes sont saturées.

Un corollaire sur la percolation

Considérons $G = \text{Ber}(p)$, $p > p_c$.

Un corollaire sur la percolation

Considérons $G = \text{Ber}(p)$, $p > p_c$.

On peut montrer que le $\text{flow}(nA)$ est égal au cardinal maximal d'une collection disjointe de chemins ouverts de nA vers l'infini ($:= \text{dis}(nA)$).

Un corollaire sur la percolation

Considérons $G = \text{Ber}(p)$, $p > p_c$.

On peut montrer que le $\text{flow}(nA)$ est égal au cardinal maximal d'une collection disjointe de chemins ouverts de nA vers l'infini ($:= \text{dis}(nA)$).

On suppose qu'il existe m chemins disjoints ouverts alors $\text{flow}(nA) \geq m$.
Et donc $\text{flow}(nA) \geq \text{dis}(nA)$.

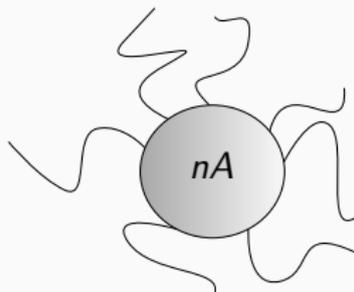


Figure 4: Des chemins infinis disjoints qui partent de $\partial(nA)$

Un corollaire sur la percolation

Appliquons ce résultat à $G = \text{Ber}(p)$, $p > p_c$.

Un corollaire sur la percolation

Appliquons ce résultat à $G = \text{Ber}(p)$, $p > p_c$.

Corollaire

Soit $\epsilon > 0$, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall n \geq 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{\text{dis}(nA)}{n^{d-1}} - \mathcal{C}(A) \right| \geq \epsilon \right) \leq C_1 \exp(-C_2 n^{d-1}).$$

Merci pour votre attention !