Détection et localisation d'une rupture d'intensité dans un processus de Poisson

Ronan Le Guével

Journées MAS
Rouen

Travail en collaboration avec M. Fromont et F. Grela (Univ. Rennes 2)

1. Détection d'une rupture par test simple

2. Localisation d'une rupture par tests multiples

1. Détection d'une rupture par test simple

2. Localisation d'une rupture par tests multiples

Observations

On observe une seule trajectoire $N = (N_t)_{t\in[0,1]}$ d'un processus de Poisson d'intensité λ par rapport à la mesure Ldt sur l'intervalle $[0, 1]$ (pour $L \geq 1$ fixé).

Observations

On observe une seule trajectoire $N = (N_t)_{t \in [0,1]}$ d'un processus de Poisson d'intensité λ par rapport à la mesure Ldt sur l'intervalle $[0,1]$ (pour $L \geq 1$ fixé).

Pour λ_0 fixé connu, on va supposer que λ est de la forme

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad t \in [0,1],$$

pour un certain $\tau \in (0,1)$ et $\delta \in (-\lambda_0, R - \lambda_0) \setminus \{0\}$ (avec $R > 0$ fixé).

Observations

On observe une seule trajectoire $N = (N_t)_{t\in[0,1]}$ d'un processus de Poisson d'intensité λ par rapport à la mesure Ldt sur l'intervalle $[0, 1]$ (pour $L \geq 1$ fixé).

Pour λ_0 fixé connu, on va supposer que λ est de la forme

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad t \in [0, 1],$$

pour un certain $\tau \in (0, 1)$ et $\delta \in (-\lambda_0, R - \lambda_0)\setminus\{0\}$ (avec $R > 0$ fixé).

On note $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ l'ensemble de ces fonctions.

Test de détection

Pour λ_0 fixé connu, on va supposer que λ est de la forme

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad t \in [0,1],$$

pour un certain $\tau \in (0,1)$ et $\delta \in (-\lambda_0, R - \lambda_0) \backslash \{0\}$ (avec $R > 0$ fixé).

On note $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ l'ensemble de ces fonctions.

Test de détection

Pour λ_0 fixé connu, on va supposer que λ est de la forme

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad t \in [0,1],$$

pour un certain $\tau \in (0,1)$ et $\delta \in (-\lambda_0, R - \lambda_0) \backslash \{0\}$ (avec $R > 0$ fixé).

On note $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ l'ensemble de ces fonctions.

On souhaite tester s'il y a une rupture ou non :

$$H_0 : \lambda \equiv \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R].$$

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax

On va adopter un point de vue d'optimalité minimax non-asymptotique introduit par Baraud (2002).

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax

On va adopter un point de vue d'optimalité minimax non-asymptotique introduit par Baraud (2002).

Soit $\alpha, \beta \in (0, 1)$. On considère la distance usuelle sur $L_2([0, 1])$ et un test ϕ_α de niveau α pour les hypothèses : H_0 vs $H_1 : \lambda \in \mathcal{S}$.

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax

On va adopter un point de vue d'optimalité minimax non-asymptotique introduit par Baraud (2002).

Soit $\alpha, \beta \in (0, 1)$. On considère la distance usuelle sur $L_2([0, 1])$ et un test ϕ_α de niveau α pour les hypothèses : $H_0 \text{ vs } H_1 : \lambda \in \mathcal{S}$.

On définit le taux de séparation uniforme de ϕ_α pour l'alternative $\mathcal{S}$ par

$$\mathrm{SR}_\beta(\phi_\alpha, \mathcal{S}) = \inf\{r > 0 : \sup_{\lambda \in \mathcal{S}, d_2(\lambda, \lambda_0) \geq r} \mathbb{P}_\lambda(\phi_\alpha(N) = 0) \leq \beta\}.$$

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax

On va adopter un point de vue d'optimalité minimax non-asymptotique introduit par Baraud (2002).

Soit $\alpha, \beta \in (0,1)$. On considère la distance usuelle sur $L_2([0,1])$ et un test ϕ_α de niveau α pour les hypothèses : H_0 vs $H_1 : \lambda \in \mathcal{S}$.

On définit le taux de séparation uniforme de ϕ_α pour l'alternative $\mathcal{S}$ par

$$\mathrm{SR}_\beta(\phi_\alpha, \mathcal{S}) = \inf\{r > 0 : \sup_{\lambda \in \mathcal{S}, d_2(\lambda,\lambda_0) \geq r} \mathbb{P}_\lambda(\phi_\alpha(N) = 0) \leq \beta\}.$$

Le **taux de séparation minimax** de niveaux α et β pour l'alternative $\mathcal{S}$ est alors

$$\mathrm{mSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}) = \inf_{\phi_\alpha : \mathbb{P}_{\lambda_0}(\phi_\alpha(N)=1) \leq \alpha} \mathrm{SR}_\beta(\phi_\alpha, \mathcal{S}).$$

Borne inférieure

Proposition

Soit $\alpha, \beta \in (0,1)$ *avec* $\alpha + \beta < 1/2$, $\lambda_0 > 0$ *et* $R > \lambda_0$. *Il existe* $L_0(\alpha, \beta, \lambda_0, R) > 0$ *(explicite) telle que pour tout* $L \geq L_0(\alpha, \beta, \lambda_0, R)$,

$$\mathrm{mSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) \geq \sqrt{\lambda_0 \frac{\log \log L}{L}}.$$

Borne inférieure, approche bayésienne

Lemme (Baraud (2002), Ingster (1993))

Soit μ une mesure de probabilité sur

$$(\mathcal{S})_r = \{\lambda \in \mathcal{S} : d_2(\lambda, \lambda_0) \geq r\}$$

et $\mathbb{P}_\mu$ la mesure mélange

$$\mathbb{P}_\mu = \int \mathbb{P}_\lambda d\mu(\lambda).$$

Si $\alpha + \beta < 1$ et $\mathbb{E}_{\lambda_0}\left[(\frac{d\mathbb{P}_\mu}{d\mathbb{P}_{\lambda_0}})^2\right] \leq 1 + 4(1 - \alpha - \beta)^2$, alors

$$\mathrm{mSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}) \geq r.$$

Construction de la statistique de test

Pour $\tau \in (0, 1)$, on pose

$$S_\tau(N) = N(\tau, 1] - \lambda_0(1 - \tau)L$$

et $s_\tau(u)$ le u-quantile de $|S_\tau(N)|$ sous H_0.

Construction de la statistique de test

Pour $\tau \in (0, 1)$, on pose

$$S_\tau(N) = N(\tau, 1] - \lambda_0(1 - \tau)L$$

et $s_\tau(u)$ le u-quantile de $|S_\tau(N)|$ sous H_0.
On considère les nombres dyadiques

$$\tau_k = 1 - 2^{-k}, \quad k = 1, ..., \lfloor \log_2 L \rfloor.$$

Construction de la statistique de test

Pour $\tau \in (0,1)$, on pose

$$S_\tau(N) = N(\tau, 1] - \lambda_0(1-\tau)L$$

et $s_\tau(u)$ le u-quantile de $|S_\tau(N)|$ sous H_0.
On considère les nombres dyadiques

$$\tau_k = 1 - 2^{-k}, \quad k = 1, ..., \lfloor \log_2 L \rfloor.$$

On définit enfin comme statistique de test

$$\phi(N) = \mathbf{1}_{\left\{ \max_{k=1,\dots,\lfloor \log_2 L \rfloor} \left(|S_{\tau_k}(N)| - s_{\tau_k}(1-u_\alpha) \right) > 0 \right\}}$$

avec $u_\alpha = \alpha / \lfloor \log_2 L \rfloor$.

Contrôle des erreurs

On pose $\phi(N) = \mathbf{1}_{\left\{\max\limits_{k=1,\ldots,\lfloor \log_2 L \rfloor}\left(|S_{\tau_k}(N)| - s_{\tau_k}(1-u_\alpha)\right) > 0\right\}}$.

Contrôle des erreurs

On pose $\phi(N) = \mathbf{1}_{\left\{ \max_{k=1,\dots,\lfloor \log_2 L \rfloor} \left(|S_{\tau_k}(N)| - s_{\tau_k}(1-u_\alpha) \right) > 0 \right\}}$.

- Le contrôle de l'erreur de type I est immédiat.

Contrôle des erreurs

On pose $\phi(N) = \mathbf{1}_{\left\{\max\limits_{k=1,\dots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(|S_{\tau_k}(N)| - s_{\tau_k}(1-u_\alpha)\right)>0\right\}}$.

- Le contrôle de l'erreur de type I est immédiat.
- Pour l'erreur de type II : pour tout $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$

$$\mathbb{P}_\lambda(\phi(N) = 0) \leq \mathbb{P}_\lambda\left(|S_{\tau_k}(N)| \leq s_{\tau_k}(1-u_\alpha)\right)$$

Contrôle des erreurs

On pose $\phi(N) = \mathbf{1}_{\left\{\max\limits_{k=1,\ldots,\lfloor \log_2 L \rfloor} \left(|S_{\tau_k}(N)| - s_{\tau_k}(1-u_\alpha)\right) > 0\right\}}$.

- Le contrôle de l'erreur de type I est immédiat.
- Pour l'erreur de type II : pour tout $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$

$$\mathbb{P}_\lambda(\phi(N) = 0) \leq \mathbb{P}_\lambda\left(|S_{\tau_k}(N)| \leq s_{\tau_k}(1 - u_\alpha)\right)$$

et ce pour tout k.

Contrôle du quantile

Lemme

Pour u et τ dans $(0,1)$,

$$s_\tau(1-u) \leq \lambda_0 L(1-\tau) g^{-1}\left(\frac{\log(2/u)}{\lambda_0(1-\tau)L}\right)$$

avec $g(x) = (1+x)\log(1+x) - x$ *pour* $x > 0$.

Contrôle du quantile

Lemme

Pour u et τ dans $(0,1)$,

$$s_\tau(1-u) \leq \lambda_0 L(1-\tau) g^{-1}\left(\frac{\log(2/u)}{\lambda_0(1-\tau)L}\right)$$

avec $g(x) = (1+x)\log(1+x) - x$ pour $x > 0$.

On peut utiliser une inégalité exponentielle sur les processus de comptage pour obtenir ce résultat.

Contrôle de l'erreur de type II

On choisit un k_0 particulier pour avoir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda(\phi(N)=0) &\leq \mathbb{P}_\lambda\left(|S_{\tau_{k_0}}(N)| \leq s_{\tau_{k_0}}(1-u_\alpha)\right) \\
&\leq \mathbb{P}_\lambda\left(|S_{\tau_{k_0}}(N)| \leq \lambda_0 L(1-\tau_{k_0})g^{-1}\left(\frac{\log(2/u_\alpha)}{\lambda_0(1-\tau_{k_0})L}\right)\right) \\
&\leq \mathbb{P}_\lambda\left(|S_{\tau_{k_0}}(N)| - \mathbb{E}_\lambda[|S_{\tau_{k_0}}(N)|] \leq -\sqrt{\frac{\mathbf{Var}_\lambda[|S_{\tau_{k_0}}(N)|]}{\beta}}\right) \\
&(\leq \beta)
\end{aligned}$$

sous la condition

$$\delta^2(1-\tau) = d^2(\lambda,\lambda_0) \geq \delta^2(1-\tau_{k_0}) \geq C\log(1/u_\alpha)/L.$$

Borne supérieure

On obtient ainsi :

Théorème

Il existe $L_0 = L_0(\lambda_0, \alpha, \beta, R) > 0$ *et* $C(\lambda_0, \alpha, \beta, R) > 0$ *tels que pour* $L \geq L_0$,

$$\mathrm{SR}_\beta(\phi_\alpha, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq C(\lambda_0, \alpha, \beta, R)\sqrt{\frac{\log\log L}{L}},$$

et donc en particulier

$$\mathrm{mSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq C(\lambda_0, \alpha, \beta, R)\sqrt{\frac{\log\log L}{L}}.$$

Autres résultats

Alternatives	**Ordre de la vitesse de séparation minimax**
$\mathcal{S}[\lambda_0, R]$	$\sqrt{\frac{\log \log L}{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \delta]$ (δ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \tau]$ (τ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$

Autres résultats

Alternatives	**Ordre de la vitesse de séparation minimax**
$\mathcal{S}[\lambda_0, R]$	$\sqrt{\frac{\log\log L}{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \delta]$ (δ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \tau]$ (τ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$

Autres cas :
On obtient aussi le cas λ_0 inconnu et celui de la détection d'un segment.

Alternatives	**Ordre de la vitesse de séparation minimax**
$\mathcal{S}[\lambda_0, R]$	$\sqrt{\frac{\log\log L}{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \delta]$ (δ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \tau]$ (τ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$

Autres cas :
On obtient aussi le cas λ_0 inconnu et celui de la détection d'un segment.

- Pour λ_0 inconnu : vitesses inchangées.

Autres résultats

Alternatives	Ordre de la vitesse de séparation minimax
$\mathcal{S}[\lambda_0, R]$	$\sqrt{\frac{\log \log L}{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \delta]$ (δ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \tau]$ (τ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$

Autres cas :
On obtient aussi le cas λ_0 inconnu et celui de la détection d'un segment.

- Pour λ_0 inconnu : vitesses inchangées.
- Pour un segment : vitesse en $\sqrt{\frac{\log L}{L}}$ pour le cas général.

1. Détection d’une rupture par test simple

2. Localisation d’une rupture par tests multiples

Problème de tests multiples

Pour $\lambda_0 > 0$, $R > \lambda_0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ fixés, on considère

$$H_k[\lambda_0, R] : \quad "\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad \tau \in [k/M, 1]"$$

pour $k = 1, ..., M$.

Problème de tests multiples

Pour $\lambda_0 > 0$, $R > \lambda_0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ fixés, on considère

$$H_k[\lambda_0, R] : \quad "\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad \tau \in [k/M, 1]"$$

pour $k = 1, ..., M$. Pour $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$, on note

$$\mathcal{T}(\lambda) = \{k \in \{1, ..., M\} : \lambda \in H_k[\lambda_0, R]\} \quad \text{(True hypotheses)}$$

et

$$\mathcal{F}(\lambda) = \{1, ..., M\} \backslash \mathcal{T}(\lambda) \quad \text{(False hypotheses)}.$$

Problème de tests multiples

Pour $\lambda_0 > 0$, $R > \lambda_0$ et $M \in \mathbb{N}^*$ fixés, on considère

$$H_k[\lambda_0, R] : \quad "\lambda(t) = \lambda_0 + \delta \mathbf{1}_{(\tau,1]}(t), \quad \tau \in [k/M, 1]"$$

pour $k = 1, ..., M$. Pour $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$, on note

$$\mathcal{T}(\lambda) = \{k \in \{1, ..., M\} : \lambda \in H_k[\lambda_0, R]\} \quad \text{(True hypotheses)}$$

et

$$\mathcal{F}(\lambda) = \{1, ..., M\} \backslash \mathcal{T}(\lambda) \quad \text{(False hypotheses).}$$

On va définir une procédure de tests multiples $\mathcal{R} \subset \{1, ..., M\}$ dont le but est d'estimer $\mathcal{F}(\lambda)$.

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax par familles

Pour l'erreur de type I, on considère le Family Wise Error Rate :

$$\mathrm{FWER}(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) = \sup_{\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]} \mathbb{P}_\lambda \left(|\mathcal{R} \cap \mathcal{T}(\lambda)| \geq 1 \right).$$

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax par familles

Pour l'erreur de type II, on considère le minimax Family Wise Separation Rate introduit par Fromont, Lerasle et Reynaud-Bouret (2015).

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax par familles

Pour l'erreur de type II, on considère le minimax Family Wise Separation Rate introduit par Fromont, Lerasle et Reynaud-Bouret (2015). On considère pour $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$ et $r > 0$

$$\mathcal{F}_r(\lambda) = \{H_k[\lambda_0, R] : \ d_2(\lambda, H_k[\lambda_0, R]) \geq r\}.$$

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax par familles

Pour l'erreur de type II, on considère le minimax Family Wise Separation Rate introduit par Fromont, Lerasle et Reynaud-Bouret (2015). On considère pour $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$ et $r > 0$

$$\mathcal{F}_r(\lambda) = \{H_k[\lambda_0, R] : \ d_2(\lambda, H_k[\lambda_0, R]) \geq r\}.$$

Soit $\alpha, \beta \in (0,1)$. Le taux de séparation de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ est

$$\mathrm{FWSR}_\beta(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) = \inf\{r > 0 : \sup_{\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]} \mathbb{P}_\lambda\left(|\mathcal{F}_r(\lambda) \cap \overline{\mathcal{R}}| \geq 1\right) \leq \beta\}.$$

Critère d'optimalité : la vitesse de séparation minimax par familles

Pour l'erreur de type II, on considère le minimax Family Wise Separation Rate introduit par Fromont, Lerasle et Reynaud-Bouret (2015). On considère pour $\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]$ et $r > 0$

$$\mathcal{F}_r(\lambda) = \{H_k[\lambda_0, R] : \ d_2(\lambda, H_k[\lambda_0, R]) \geq r\}.$$

Soit $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Le taux de séparation de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ est

$$\mathrm{FWSR}_\beta(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) = \inf\{r > 0 : \sup_{\lambda \in \mathcal{S}[\lambda_0, R]} \mathbb{P}_\lambda \left(|\mathcal{F}_r(\lambda) \cap \overline{\mathcal{R}}| \geq 1\right) \leq \beta\}.$$

Le taux de séparation minimax par familles pour l'espace d'alternatives $\mathcal{S}[\lambda_0, R]$ est ensuite

$$\mathrm{mFWSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) = \inf_{\mathcal{R} \,:\, \mathrm{FWER}(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq \alpha} \mathrm{FWSR}_\beta(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]).$$

Borne inférieure

Les hypothèses étant emboîtées ($H_{k+1} \subset H_k$), on obtient directement la borne inférieure :

Proposition

Soit $(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ *tels que* $\alpha + \beta < 1/2$, $\lambda_0 > 0$ *et* $R > \lambda_0$. *Il existe* $L_0(\alpha, \beta, \lambda_0, R) > 0$ *tel que pour tout* $L \geq L_0(\alpha, \beta, \lambda_0, R)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{mFWSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) &\geq \mathrm{mSR}_{\alpha,\beta}^{\cap H_k}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) \\ &\geq \sqrt{\lambda_0 \frac{\log \log L}{L}}. \end{aligned}$$

Construction de la procédure de tests multiples

On construit pour $k = 1, ..., M$ un test simple ϕ_k pour

$$H_k[\lambda_0, R] \quad \text{versus} \quad \mathcal{S}[\lambda_0, R] \backslash H_k[\lambda_0, R].$$

Construction de la procédure de tests multiples

On construit pour $k = 1, ..., M$ un test simple ϕ_k pour

$$H_k[\lambda_0, R] \quad \text{versus} \quad \mathcal{S}[\lambda_0, R] \backslash H_k[\lambda_0, R].$$

On pose

$$\phi_k = \mathbf{1}_{\left\{\max_{j \in 1,\dots,\lfloor \log_2 L \rfloor}\left(N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}), \frac{k}{M}\right] - p_{\frac{\lambda_0 k L}{M 2^j}}(1-\frac{u_\alpha}{2})\right) > 0\right\}} \\ \vee \mathbf{1}_{\left\{\max_{j \in 1,\dots,\lfloor \log_2 L \rfloor}\left(p_{\frac{\lambda_0 k L}{M 2^j}}(\frac{u_\alpha}{2}) - N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}), \frac{k}{M}\right]\right) > 0\right\}},$$

avec $p_\xi(u)$ le u-quantile de la loi de Poisson de paramètre ξ et $u_\alpha = \alpha / \lfloor \log_2 L \rfloor$.

Construction de la procédure de tests multiples

On pose

$$\phi_k = \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\dots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]-p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(1-\frac{u_\alpha}{2})\right)>0\right\}} \\ \vee \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\dots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(\frac{u_\alpha}{2})-N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]\right)>0\right\}},$$

Construction de la procédure de tests multiples

On pose

$$\phi_k = \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\ldots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]-p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(1-\frac{u_\alpha}{2})\right)>0\right\}} \vee \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\ldots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(\frac{u_\alpha}{2})-N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]\right)>0\right\}},$$

et on définit

$$\hat{k} = \sup\{k' \in \{1,\ldots,M\} : \phi_{k'}(N) = 0\}.$$

Construction de la procédure de tests multiples

On pose

$$\phi_k = \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\ldots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]-p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(1-\frac{u_\alpha}{2})\right)>0\right\}} \vee \mathbf{1}_{\left\{\max_{j\in 1,\ldots,\lfloor \log_2 L\rfloor}\left(p_{\frac{\lambda_0 kL}{M2^j}}(\frac{u_\alpha}{2})-N\left(\frac{k}{M}(1-2^{-j}),\frac{k}{M}\right]\right)>0\right\}},$$

et on définit

$$\hat{k} = \sup\{k' \in \{1,\ldots,M\} : \phi_{k'}(N) = 0\}.$$

Notre procédure de tests multiples est alors

$$\mathcal{R} = \{H_k[\lambda_0, R] : k \geq \hat{k}+1\}.$$

Borne supérieure

Théorème

Soit $(\alpha, \beta) \in (0,1)$, $\lambda_0 > 0$, $R > \lambda_0$ *et* L *assez grand. Alors la procédure de tests multiples* $\mathcal{R}$ *vérifie* $\mathrm{FWER}(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq \alpha$ *et*

$$\mathrm{FWSR}_\beta(\mathcal{R}, \mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq C'(\lambda_0, \alpha, \beta, R)\sqrt{\frac{\log\log L}{L}},$$

où $C'(\lambda_0, \alpha, \beta, R) > 0$. *En particulier*

$$\mathrm{mFWSR}_{\alpha,\beta}(\mathcal{S}[\lambda_0, R]) \leq C'(\lambda_0, \alpha, \beta, R)\sqrt{\frac{\log\log L}{L}}.$$

Autres résultats

Alternatives	**Ordre de mFWSR**
$\mathcal{S}[\lambda_0, R]$	$\sqrt{\frac{\log\log L}{L}}$
$\mathcal{S}[\lambda_0, \delta]$ (δ connu)	$\frac{1}{\sqrt{L}}$