

# Modélisation de dégradation par les processus stochastiques

Mitra Fouladirad

Ecole Centrale Marseille

Objectifs :

- éviter la panne et la période d'inactivité
- prédire les pannes
- planifier des réparations et des actions de maintenance
- optimiser les performances, le fonctionnement ...

- Soit  $T$  la variable aléatoire représentant la durée de vie ou la date de panne d'un composant (sans maintenance)
- $T$  est une variable aléatoire sur l'espace  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$
- La **Fiabilité** du composant à l'instant  $t$  :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

- Le taux de défaillance à l'instant  $t$  :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

est où  $f$  est la densité de probabilité associée à  $T$ .

- $R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right)$

- Maintenance corrective : maintenance (réparation, mise à neuf, remplacement) après la panne
- Maintenance préventive : maintenance (réparation, mise à neuf, remplacement) avant la panne
- Maintenance parfaite (As Good As New, AGAN) : mise à neuf ou remplacement
- Maintenance imparfaite : réparation sans mise à neuf
- Maintenance minimale (As Bad As Old, ABAO) : mise en marche dans l'état juste avant la panne.

L'objectif est toujours de calculer la fiabilité du composant à un instant  $t$ .

- En présence de maintenance corrective parfaite, la suite de variables aléatoires

$$\{T_i, i \in \mathbb{N}\}$$

est un processus stochastique où les incréments  $T_i - T_{i-1}$ ,  $i > 1$ , sont indépendantes et identiquement distribuées :

## **processus de renouvellement**

- Exemple : si  $T_i - T_{i-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , alors  $\lambda(t) = \lambda, \forall t \in \mathbb{R}$ 
  - Pas de dégradation
  - $\{T_i, i \in \mathbb{N}\}$  est un processus de Markov
  - $\{N_t, t \in \mathbb{R}\}$  où  $N_t = \sum_{i>1} \mathbb{1}_{T_i < t}$  est un processus de Poisson homogène
- Exemple : si  $T_i - T_{i-1}$  suit une loi exponentielle avec  $\lambda$  une fonction non linéaire comme taux de défaillance
  - Dégradation
  - $\{T_i, i \in \mathbb{N}\}$  est un processus de Markov
  - $\{N_t, t \in \mathbb{R}\}$  où  $N_t = \sum_{i>1} \mathbb{1}_{T_i < t}$  est un processus de Poisson non-homogène

- En présence de maintenance corrective imparfaite instantanée, après chaque action de maintenance à  $T_i$ , en considérant  $T_i^-$  l'instant juste avant la  $i$ ème maintenance et  $T_i^+$  l'instant juste après la  $i$ ème maintenance

$$\lambda(T_i^+) < \lambda(T_i^-) \neq \lambda(0)$$

On parlera alors de l'intensité de défaillance

$$\forall t \geq 0, \lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_{t-} = 1 | \mathcal{H}_{t-})$$

où  $\mathcal{H}_{t-}$  est l'histoire du processus des réparations à l'instant  $t$ .

Soit  $D_i = T_i - T_{i-1}$  et notons  $A_i$  l'âge effectif du composant défini par

$$\forall i \geq 0, \forall t \geq 0, P(D_{i+1} > t | D_1, \dots, D_i) = P(T > A_i + t | T > A_i)$$

Alors l'âge virtuel peut être défini comme suit

$$V_t = A_{N_{t-}} + t - T_{N_{t-}}$$

- ABAO :  $A_i = T_i$  le processus de comptage des pannes est un processus de Poisson non-homogène :  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda(t))$
- AGAN :  $A_i = 0$  le processus de comptage des pannes est un processus de Poisson homogène :  $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- "Arithmetic Reduction of Age model" avec mémoire 1 ( $ARA_1$ ) un cas particulier du modèle Kijima's Type I .

$$A_i = (1 - \rho)T_i$$

où  $\rho \in [0, 1]$  est l'efficacité de maintenance.

- "Arithmetic Reduction of Age model" avec mémoire infini ( $ARA_\infty$ ) un cas particulier du modèle Kijima's Type II.

$$A_i = (1 - \rho)(A_{i-1} + D_i)$$

où  $\rho \in [0, 1]$  est l'efficacité de maintenance.

- The Brown-Proshchan (BP) :  $A_i = \sum_{j=1}^i \left[ \prod_{k=j}^i (1 - B_k) \right] D_j$ ,  
où  $B_k$  est une v.a. de Bernoulli de paramètre  $\rho$ ,  
indépendent de  $D_k$  et de  $\{D_j, B_j\}_{1 \leq j < k}$ .

Si des maintenances préventives imparfaites ou minimales sont aussi appliquées, le calcul de fiabilité devient plus difficile.

Maintenance préventive :

- périodique
- basée sur l'âge
- aléatoire avec sa propre loi de probabilité

Observations : données censurées ( $T_i \wedge C_i$ ) où  $C_i$  est la date de la  $i$  ème maintenance préventive

## Deux possibilités

- Durée de vie : marche ou panne, état de santé est une boîte noire
- Etat de santé ou niveau de dégradation (état entre marche et panne). Pour les composants ou systèmes plus complexes informations supplémentaires sont précieuses : dégradation

- Soit  $X_t$  l'état de santé ou le niveau de dégradation à l'instant  $t$  : variable aléatoire sur  $(E, \mathcal{E})$ .
- $E = \mathcal{U} \cup \bar{\mathcal{U}}$ ,  $\mathcal{U}$  zone de défaillance.
- Espace état fini, dénombrable ou infini
- $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique
- Date de panne :  $\inf\{t, X_t \in \mathcal{U}\}$
- Fiabilité  $R(t) = \mathbb{P}(X_t \in \bar{\mathcal{U}})$
- Durée de vie restante  $RUL(t) = \inf\{s \geq t, X_s \notin \mathcal{U}\} - t$

## Modèles usuels

- Chaîne de Markov
- Processus semi-Markov
- Processus de Markov déterministe par Morceaux
- ....

- Trajectoire monotone ou non-monotone
- Exemple du cas d'une dimension,
  - la date de panne :

$$\inf\{t \in \mathbb{R}^+, X_t \geq L\}$$

- Durée de vie restante

$$RUL(t) = \inf\{s \geq t, X_s \geq L\} - t.$$

Processus Gamma :

- $X_0 = 0$  p.s.
- $(X_t)_{t \geq 0}$  a des incréments indépendants
- Pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$ , suit une loi Gamma probability de fonction de forme  $\alpha(t) - \alpha(s)$  et de paramètre d'échelle  $\beta$  :

$$f_{\alpha(t)-\alpha(s),\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t) - \alpha(s))\beta^{\alpha(t)-\alpha(s)}} x^{\alpha(t)-\alpha(s)-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

où  $\beta > 0$  et  $\int_0^t \alpha(u) du > 0$

Un processus inverse gaussien process de fonction de moyenne  $\Lambda(t)$  and de paramètre d'échelle  $\nu$  est défini par :

- $X_0 = 0$  p.s.
- $(X_t)_{t \geq 0}$  a des incréments indépendants
- Pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$ , suit une loi inverse gaussien  $IG(\Lambda(t) - \Lambda(s), \nu(\Lambda(t) - \Lambda(s))^2)$  :

$$f_{\mu(s,t),\theta(s,t)}(x) = \sqrt{\frac{\theta(s,t)}{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\theta(s,t)(x - \mu(s,t))^2}{2\mu(s,t)^2 x}\right) \mathbf{1}_{x>0}$$

où  $\mu(s,t) = \Lambda(t) - \Lambda(s)$ ,  $\theta(s,t) = \nu(\Lambda(t) - \Lambda(s))^2$ .

# Dégradation non-monotone

- Process de Wiener avec ou sans dérive
- Mouvement brownien géométrique (modèle Black and Scholes) :  $(X_t)_{t \geq 0}$  satisfait :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad \sigma > 0,$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$   $\sigma \in \mathbb{R}^+$  et

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right),$$

Soit  $X_0 = x_0$  alors  $X_t$  suit une loi log-normale de moyenne  $x_0 e^{\mu t}$  et de variance  $x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$  et la loi de transition de l'état  $x$  à l'instant  $s$  à l'état  $y$  à l'instant  $t > s$  est comme suit :

$$p(y, t|x, s) = \sqrt{\frac{\sigma^2(t-s)}{2\pi y^3}} \exp \left( -\frac{\sigma^2(t-s) \left( y - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t-s) + \ln(x) \right)^2}{2 \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (t-s) + \ln(x)^2} \right)$$

- Ornstein-Uhlenbeck

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma dB_t$$

où  $k$ ,  $\theta$  and  $\sigma$  trois constantes réelles positives et

$$X_t = X_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt}) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dB_s,$$

$(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov.

- Log Ornstein-Uhlenbeck

- Bessel process :

Le processus Bessel  $(X_t)_{t \geq 0}$  satisfait :

$$dX_t = \frac{a}{X_t} dt + dB_t$$

où  $a \in \mathbb{R}$ .

Si  $X_t$  est la norme au carré d'un mouvement brownien standard à  $n$  dimensions alors  $a = \frac{n-1}{2}$ .

La loi de transition de l'état  $x$  à l'instant  $s$  à l'état  $y$  à l'instant  $t > s$  est comme suit :

$$p(x, t|y, s) = \frac{1}{t-s} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} e^{-\frac{x^2+y^2}{2(t-s)}} I_\nu\left(\frac{xy}{t-s}\right) \mathbf{1}_{x>0}$$

# Dégradation non-monotone

Processus Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t$$

où  $k$ ,  $\theta$  et  $\sigma$  sont des réelles et

$$X_t = e^{-kt} BESQ_{\delta, x_0} \left( \frac{\sigma^2}{4k} (e^{kt} - 1) \right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$$

où  $BESQ_{\delta, x_0}$  est la racine d'un processus de Bessel avec  $X_0 = x_0$  at time  $t = 0$  de dimension  $\delta = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$ . la loi de transition de l'état  $x$  à l'instant  $s$  à l'état  $y$  à l'instant  $t > s$  est comme suit :

$$p(x, t|y, s) = ce^{-u-v} \left(\frac{u}{v}\right)^{q/2} I_q(2(uv)^{1/2})$$

où  $c = \frac{2k}{\sigma^2(1-e^{-kh})}$ ,  $u = cxe^{-kh}$ ,  $v = cx$ ,  $q = \frac{2k\mu}{\sigma^2} - 1$ , et  $I_q$  est la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre  $q$ .

- Calibration de modèle en présence de peu de trajectoires et peu de données
- Validation de modèle en présence de peu de trajectoires et peu de données
- Loi de temps d'atteinte (événement rare)
- Mise à jour en ligne de la durée de vie restante et prédiction (estimation des paramètres et calcul des probabilités conditionnelles)

Propagation de fissure

- Soient  $M$  composants,  $X_{k,t}$  la taille de fissure observée à l'instant d'inspection  $t \in \{t_{1,k}, \dots, t_{n_k,k}\}$ ,  $k \in \{1, \dots, M\}$ .
- La variable de fatigue  $D$  est une fonction du temps  $t$ , les paramètres  $C$  et  $m$  dépendent des propriétés des matériaux,  $K$  est l'intensité de stress and  $\Delta K$  est la taille de l'intervalle de l'intensité de stress :

$$\frac{dD}{dt} = C(\Delta K)^m$$

où  $\Delta K$  dépend de  $D$  via  $\Delta K(D) = \beta\sqrt{D}$  et  $\beta$  est une constante dans un environnement stable.

- Considérons que les  $M$  composants sont identiques et sont soumis au même effort intensif.
- La dégradation du composant  $k \in \{1, \dots, M\}$  : la taille de fissure  $X_{k,t}$  à  $t$ .
- $X_{k,t}$  est positive de trajectoire croissante
- Les fissures ne sont pas observée avant de dépasser la taille  $z$
- Le seuil de défaillance  $L > z$ .
- problème simplifié
- La dégradation ne peut pas être observée de manière continue

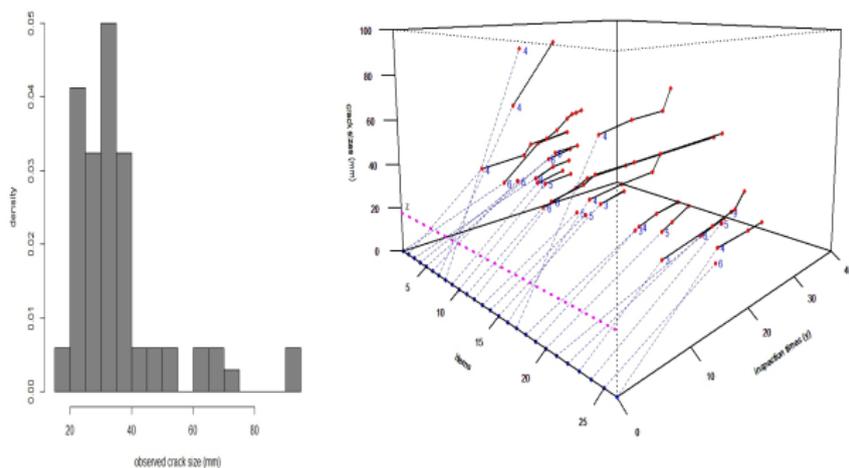
- Maximum de vraisemblance avec données censurées
- Peu de données : méthode bayésienne pour l'estimation des paramètres
- MCMC
- Calcul de fiabilité avec intervalle de confiance

- Données disponibles :  $Y_{k,t} = \max(X_{k,t}, z)$ , observées aux instants d'inspection  $t_{1,k}, \dots, t_{n_k,k}$  pour le composant  $k$
- Soit  $Z_{k,i} = X_{k,t_i} - X_{k,t_{i-1}}$  les incréments de taille de fissure pour le composant  $k$
- Increments independants
- Soit  $t_{r_k}$  la dernière inspection avant la détection de la taille réelle de la fissure i.e.

$$t_{r_k+1} = \min_{i \in \{1, \dots, n_k\}} \{t_i, X_{k,t_i} \geq z\}.$$

- Objectif : estimation de la durée de vie, fiabilité

# Propagation de fissure et donnée censurées

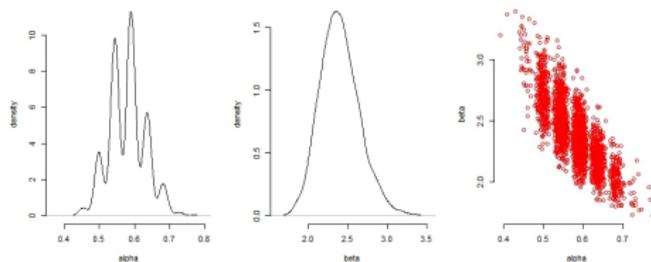


**FIGURE** – Histogram des tailles de fissures observées. Les observations dépassent tou le seuil de détection  $z = 18\text{mm}$  (Gauche). Les trajectoires observées des fissures pour 26 composants similaires. Les lignes blue correspondent à la partie censurée de la trajectoire et le nombre de données manquantes pour chaque trajectoire sont donnés en bleu. (Droite)

- Niveau de dégradation à l'instant  $t$ ,  $X_t$
- Process de dégradation  $(X_t)_{t \geq 0}$
- $X_t - X_s \sim \Gamma(\alpha(t) - \alpha(s), \beta)$
- $\alpha(t) = \int_{[0,t]} d\alpha(r)$  and  $d\alpha$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $X_t - X_s$  admet la densité :

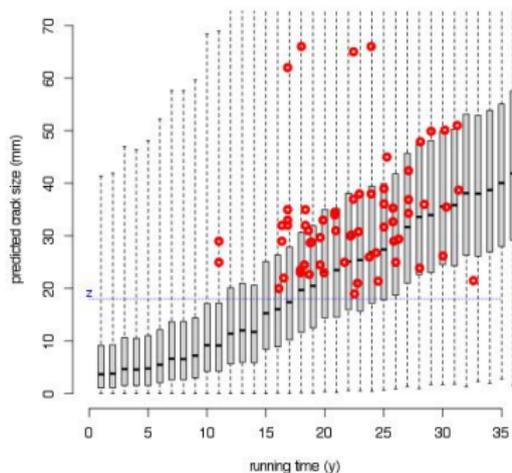
$$f_{\alpha,\beta,s,t}(x) = \frac{x^{\alpha(t)-\alpha(s)-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha(t) - \alpha(s)) \beta^{(\alpha(t)-\alpha(s))}} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

- Processus Gamma homogène  $\alpha(t) = \alpha \cdot t$
- Les paramètres  $\beta$  et  $\alpha$  sont inconnus
- Défaillance si  $X_t > L$  (L the failure threshold)
- L'objectif est éviter la défaillance
- Estimation de la durée de vie



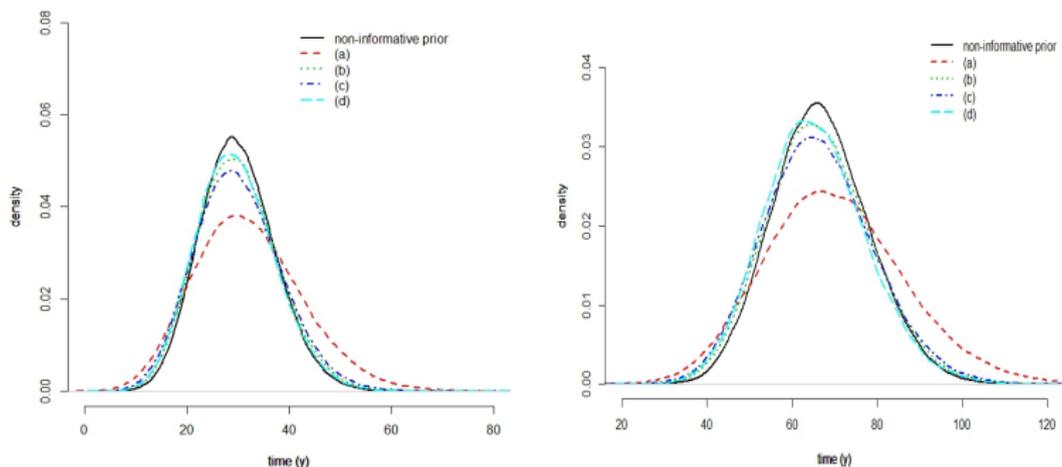
**FIGURE** – Les lois a posteriori des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et la loi jointe a posteriori obtenue pour une a priori non informative.

# Propagation de fissure : propagation d'incertitude



Boxplots pour la prédiction de chaque fissure et les observations (en rouge). Les boites proposent les intervalles de quantile (25-75%) autour de la médiane, et les lignes indiquent l'intervalle 1-99%.

# Propagation de fissure : prédiction



**FIGURE** – La loi a posteriori du temps d'atteinte du niveau 40,  $T_{40}$ , avec des a priori informatives et non-informative (Gauche). La loi a posteriori de l'instant de défaillance  $T_{90}$  avec des a priori informatives et non-informative (Droite).

# QUESTIONS