

Réseaux invariants d'échelle spatiaux

Emmanuel Jacob

Journées MAS 2022, Rouen

Motivation

Passer en revue quelques modèles de graphes aléatoires qui reproduisent/exploquent certaines propriétés que l'on retrouve sur beaucoup de réseaux complexes (réseaux sociaux, réseaux de communication, réseaux biologiques, réseaux technologiques, ...):

- Grands réseaux **clairsemés**. $N \gg 1$ sommets, $\Theta(N)$ arêtes
- **Invariants d'échelle**. La loi empirique des degrés suit une loi μ puissance, d'exposant $\tau \in (2, 3)$ ou parfois $\tau \in (2, +\infty)$.
 $\mu(k) = k^{-\tau+o(1)}$.
- **Fort regroupement**. Si on choisit au hasard 1 sommet et 2 voisins, ceux-ci sont reliés directement avec probabilité $c = \Theta(1)$.
- **(Très) petit monde**. Distances typiques de l'ordre de $\log N$ ou de $\log \log N$.
- **Robustesse** à une attaque aléatoire. Une percolation de paramètre $p > 0$ sur les sommets laisse une unique composante géante.

Modèles non spatiaux standards

- Modèle de **configuration**: les degrés des sommets sont imposés (et suivent la loi μ).

Modèle de **Chung-Lu**: Poids (W_i) iid $\sim \mu$, avec $\mathbb{P}(i \sim j) = \frac{W_i W_j}{\sum_k W_k}$,
ou bien $\mathbb{P}(i \sim j) = \frac{\beta}{N} W_i W_j$.

- Modèle d'**attachement préférentiel**: construction séquentielle du graphe avec, pour $1 \leq i < j \leq N$:

$$\mathbb{P}(i \sim j) = \frac{f(\deg(i, j-1))}{j}, \quad \text{où } \frac{f(k)}{k} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\tau-1} \in (0, 1).$$

Typiquement, $\deg(i, j) \sim (j/i)^\gamma$. Modèle d'AP simplifié:

$$\mathbb{P}(i \sim j) \sim \frac{(j/i)^\gamma}{j} = \frac{1}{N} \left(\frac{N}{i}\right)^\gamma \left(\frac{N}{j}\right)^{1-\gamma}.$$

Graphe aléatoire inhomogène

- Les **graphes aléatoires inhomogènes (IRG)** recouvrent les différents modèles simplifiés (et d'autres) avec

$$\mathbb{P}(i \sim j) = \frac{1}{N} k\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) \wedge 1$$

pour un certain noyau $k : (0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- $k(x, y) = \beta(x \wedge y)^{-\gamma}(x \vee y)^{\gamma-1}$: AP simplifié
- $k(x, y) = \beta F^{-1}(1-x)F^{-1}(1-y)$ où F^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de μ : modèle de Chung-Lu avec sommets ordonnés par poids décroissants. Avec ce choix,

$$k(x, y) = \Theta(x^{-\gamma}y^{-\gamma})$$

- Limite locale: arbre de Poisson-Galton-Watson multitype, où les enfants du sommet de type $x \in (0, 1)$ sont donnés par un PPP d'intensité $k(x, y)dy$.

Propriétés de ces modèles:

- **clairsemés, invariants d'échelle.**
- **Petit monde, non robuste** pour $\tau > 3$.
- **Très petit monde, et robustes** si $\tau \in (2, 3)$.
- On a alors les distances typiques entre 2 sommets de la composante géante:

$$\rho \frac{\log \log N}{|\log(\tau - 2)|},$$

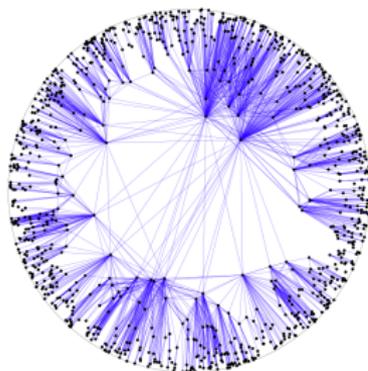
avec $\rho = 2$ ou bien $\rho = 4$ pour le modèle d'attachement préférentiel.

- Localement, structure d'arbre, et donc **pas de regroupement!** Les modèles géométriques que nous présentons maintenant corrigent cela.

Graphe aléatoire hyperbolique

Le **graphe aléatoire hyperbolique (HRG)**, introduit par [Krioukov, Papadopoulos, Kitsak, Vahdat, Boguna '10].

- Espace ambiant: Boule de rayon $R = 2 \log N$ dans le plan hyperbolique.
- N sommets de positions iid dans la boule avec un paramètre $\alpha = (\tau - 1)/2$ qui pousse plus ou moins les sommets vers le bord de la boule.
- On relie deux sommets si leur distance est plus petite que R .



Graphe aléatoire hyperbolique

- **Invariant d'échelle, fort regroupement**, et si $\tau \in (2, 3)$, **robuste et très petit monde**, avec distances typiques

$$2 \frac{\log \log N}{|\log(\tau - 2)|}.$$

- Nombreux travaux récents: petites composantes (de taille polynomiales et non logarithmiques), trou spectral, processus évoluant sur l'IRG, ...
- Construction équivalente: $x \sim y$ ssi $|y - x| \leq W_x W_y$ où Position $x =$ angle du sommet dans $(-\pi, \pi)$. Poids $W_x = \exp(-\text{distance au centre}/2)$ dans $(0, 1]$.
- Modèle limite naturel avec sommets donnés par un processus de points de Poisson *PPP* sur \mathbb{R} et poids de loi puissance.

Graphe aléatoire hyperbolique

- **Invariant d'échelle, fort regroupement**, et si $\tau \in (2, 3)$, **robuste et très petit monde**, avec distances typiques

$$2 \frac{\log \log N}{|\log(\tau - 2)|}.$$

- Nombreux travaux récents: petites composantes (de taille polynomiales et non logarithmiques), trou spectral, processus évoluant sur l'IRG, ...
- Construction équivalente: $x \sim y$ ssi $|y - x| \leq W_x W_y$ où Position $x =$ angle du sommet dans $(-\pi, \pi)$ **multiplié par $e^{R/2}$** . Poids $W_x =$ **exp(distance au bord/2) dans $[1, +\infty)$** .
- Modèle limite naturel avec sommets donnés par un processus de points de Poisson *PPP* sur \mathbb{R} et poids de loi puissance.

- Il s'agit alors d'un cas particulier du **grphe aléatoire inhomogène géométrique (GIRG)** introduit par [Bringman, Keusch, Lengler '17] sur l'espace \mathbb{T}^d ou) \mathbb{R}^d avec

$$\mathbb{P}(x \sim y) = \varphi \left(\frac{|y - x|^d}{W_x W_y} \right)$$

et φ à décroissance polynomiale de paramètre $\delta > 1$ (ou $\delta = \infty$ si φ à support compact).

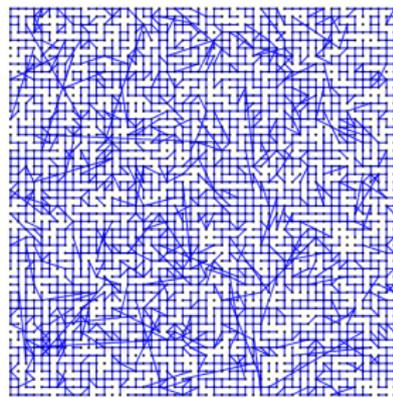
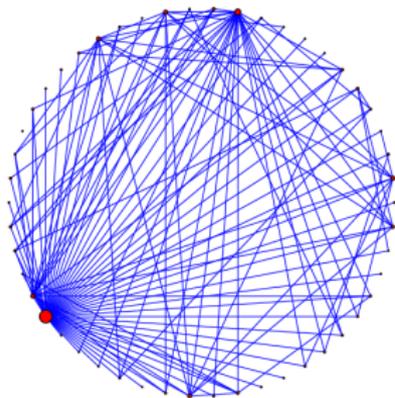
- Le GIRG recouvre également le modèle de **percolation invariante d'échelle (SFP)**: sommets \mathbb{Z}^d [Deijfen, van der Hofstad, Hooghiemstra '13] ou un *PPP* sur \mathbb{R}^d [Deprez Wüthrich '18], avec poids, avec encore $\mathbb{P}(x \sim y) = \varphi\left(\frac{|y-x|^d}{W_x W_y}\right)$ et

$$\varphi(x, y) = 1 - e^{-\beta^{-1} r^{-\delta}}.$$

- Résultats similaires, distances typiques entre 2 sommets à distance euclidienne D données par

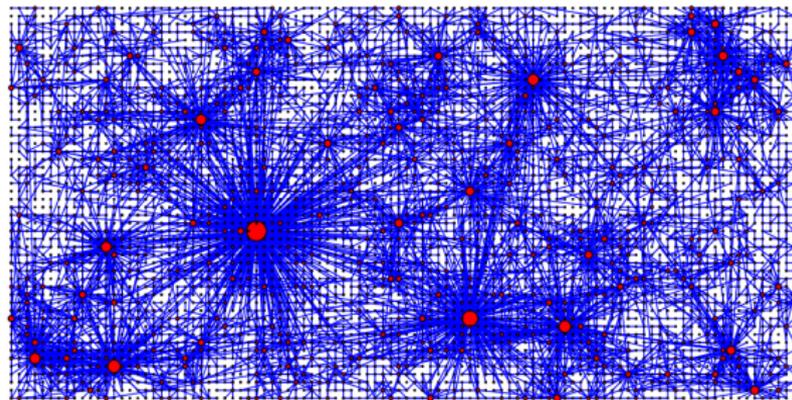
$$2 \frac{\log \log D}{|\log(\tau - 2)|}.$$

Percolation invariante d'échelle spatiale



(A) Norros-Reittu random graph for $\tau = 1.95$

(B) Long-range percolation for $\alpha = 3.9, \lambda = 0.9$



(C) Scale-free percolation for $\alpha = 3.9, \tau = 1.95, \lambda = 0.1$

Attachement Préférentiel Spatial

- **Attachement préférentiel spatial (SPA):** [Aiello, Bonato, Cooper, Janssen, Pralat '09] puis [J, Mörters '14]:

Sommets donnés par un PPP sur $\mathbb{T}^d \times (0, N)$ avec

$$\mathbb{P}((x, s) \sim (y, t)) = \varphi \left(\frac{t|y - x|^d}{f(\deg(x, t-))} \right), \quad s < t.$$

- En moyennant sur la position $y \in \mathbb{T}^d$, on obtient la probabilité de connexion

$$\frac{f(\deg(x, t-))}{t},$$

comme un modèle d'attachement préférentiel avec temps d'apparition des sommets poissonnés.

- Modèle limite: Sommets dans $\mathbb{R}^d \times (0, 1)$ avec même règle de construction.

Attachement Préférentiel Spatial

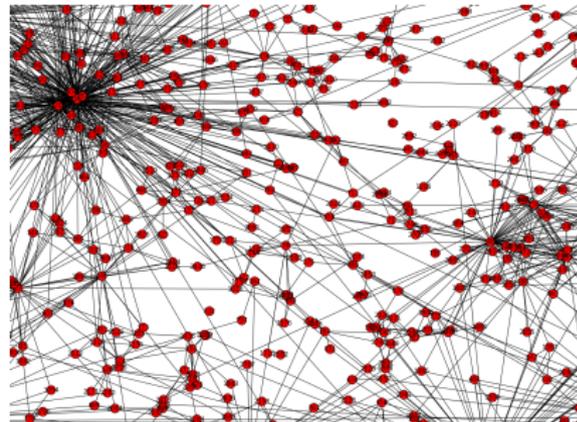
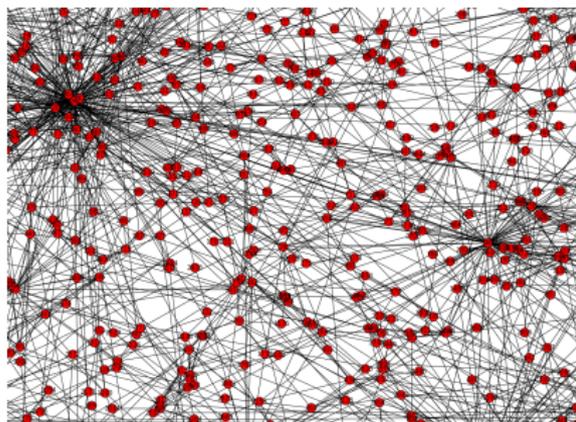


Figure: Simulation du modèle d'Attachement Préférentiel Spatial en 2 dimensions, avec même loi des degrés, mais φ à décroissance plus rapide à gauche ($\delta = 4$) qu'à droite ($\delta = 2$), menant à plus de regroupement spatial.

Attachement Préférentiel Spatial

- J, Mörters '14,'18: **Invariant d'échelle, fort regroupement.** **Robuste** au moins si $\delta(\tau - 2) > 1$.
- Hirsch, Mönch '20: Très petit monde si $\delta(\tau - 2) > 1$, avec distances typiques bornées par

$$4 \frac{\log \log N}{|\log(\delta(\tau - 2))|}.$$

- Résultats “dans l'autre sens” moins bons: non-robustesse si $\tau > 3$, ou bien en dimension 1 si $(\delta - 1)(\tau - 2) > 1$.
- Difficulté du modèle: L'événement $x \sim y$ (avec $t_x < t_y$) dépend de points z arbitrairement loin, et n'est pas indépendant de $x' \sim y'$ si $(t_x, t_y) \cap (t_{x'}, t_{y'}) \neq \emptyset$.
- Un argument utilisé, l'inégalité BK. Si $x \sim y \sim z$ et si x et z ne sont reliés à aucun autre sommet apparu avant y , alors occurrence disjoint des événements $x \sim y$ et $y \sim z$.

Attachement Préférentiel Spatial selon l'âge

- [Mörters, Gracar, Grauer, Lühtrath '21 '22]:
En remplaçant le degré par son espérance, on obtient le modèle simplifié où

$$\mathbb{P}((x, s) \sim (y, t)) = \varphi \left(\frac{|y - x|^d}{\beta s^{-\gamma} t^{\gamma-1}} \right), \quad s < t.$$

- Résultats plus complets:
 $\delta(\tau - 2) > 1$: **robuste** et distances typiques en

$$4 \frac{\log \log |y - x|}{|\log(\delta(\tau - 2))|}.$$

$\delta(\tau - 2) < 1$: **non-robuste** et distances d'ordre supérieur.

- Autres généralisations naturelles avec d'autres dépendances en s et t , permettant notamment de retrouver le modèle Poisson booléen.

- Modèles de réseaux invariants d'échelle **avec regroupement spatial**, intéressants pour modéliser les graphes complexes.
- Modèles de graphes aléatoires géométriques **avec poids hétérogènes**, intéressants pour la communauté de géométrie stochastique.
- Ils présentent de fortes similarités, en particulier lorsqu'on regarde leurs limites locales dans le régime robuste, mais aussi de vraies différences.
- Dans les modèles “avec attachement préférentiel”, les contraintes géométriques restent importantes dans le cas $\tau < 3$, et peuvent casser la robustesse du réseau ou augmenter les distances typiques.
- Beaucoup de ces modèles restent abordables mathématiquement.

Merci !

Merci ! :)