# Journées MAS 2022 : session “Marches aléatoires”

- **Quentin Berger** — Problèmes de persistance pour des marches aléatoires intégrées ;
- **Céline Bonnet** — Large fluctuations in multi-scale modeling for rest hematopoiesis ;
- **Lucile Laulin** — La marche aléatoire de l'éléphant ;
- **Loïc de Raphélis** — Marche aléatoire sur un arbre de Galton–Watson : des temps locaux à la dynamique.

# Problèmes de persistance/de survie pour des marches aléatoires intégrées

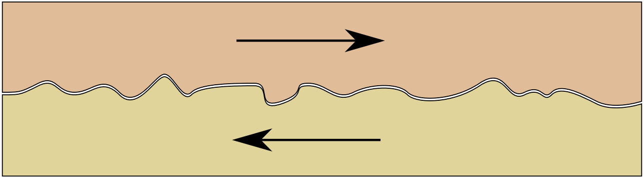
Quentin Berger

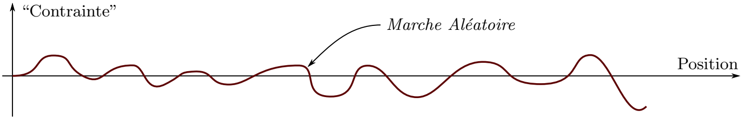
(avec Loïc Bethencourt & Camille Tardif)

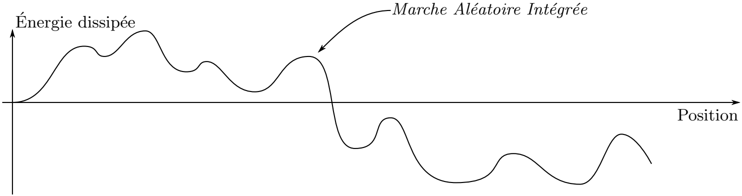
Sorbonne Université

Journées MAS 2022, Rouen

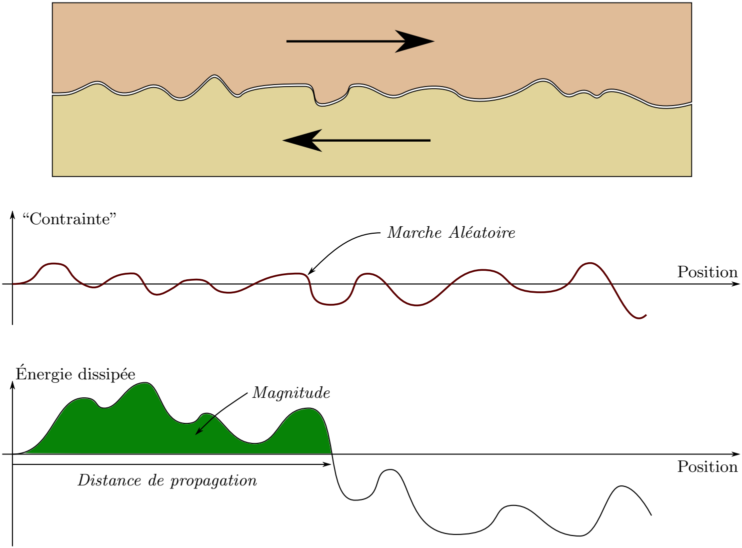
# Modélisation d'un séisme





# Modélisation d'un séisme



# Modélisation

Considérer $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire (ou une chaîne de Markov) et poser

$$\zeta_n := \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\,,$$

où $f$ est une fonction donnée, qui préserve le signe.

Exemple : $f(x) = \mathrm{sign}(x)|x|^\gamma$ pour un $\gamma \in \mathbb{R}$ — souvent $\gamma = 1$, $f(x) = x$.

But : étudier

$$T_0 := \inf\{n \geqslant 0, \zeta_n < 0\}\,, \qquad M = \sum_{k=1}^{T_0 - 1} \zeta_k\,.$$

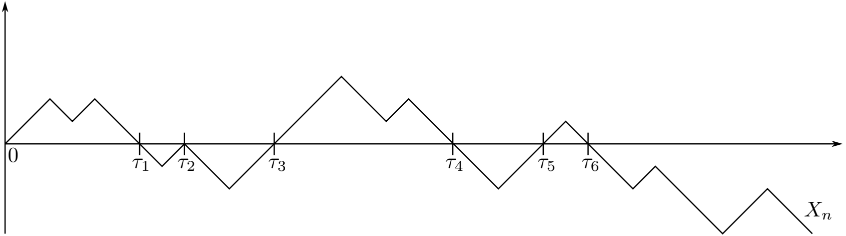
Comportement de $\mathbb{P}(T_0 > k)$, $\mathbb{P}(M > k)$ quand $k \to \infty$ :

$$\mathbb{P}(M > k) \asymp k^{-\theta} \text{ ??}$$

# Découpage en excursions

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une chaîne de Markov récurrente sur $\mathbb{Z}$, issue de 0.

$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$.

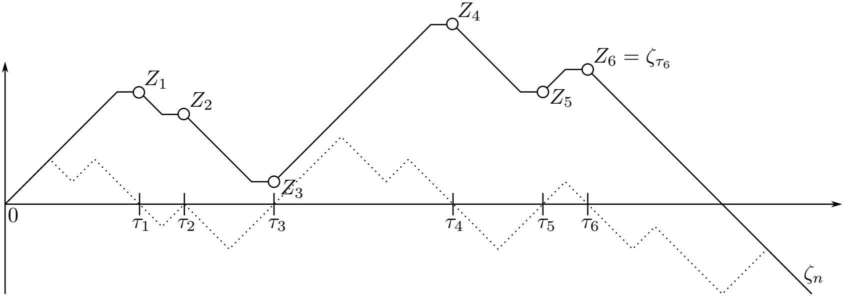



On note $\tau_j =$ "instant du $j$-ème retour en 0".
On pose

$$Z_k := \zeta_{\tau_k} = \sum_{j=1}^{k} Y_j \,, \qquad \text{avec } Y_j = \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} f(X_i) \,.$$

# Découpage en excursions

Exemple : $f(x) = \mathrm{sign}(x)\mathbf{1}_{x\neq 0}$.




Si on note $L_n := \sup\{j, \tau_j \leqslant n\}$ (temps local en 0) :

$$\mathbb{P}(T_0 > n) = \mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_{L_n}\} \geqslant 0, \zeta_n - Z_{L_n} + Z_{L_n} \geqslant 0\big)$$

(Hypothèse : pas de changement de signe à l'intérieur d'une excursion.)

# Ordre de grandeur dans le cas symétrique

De manière générale, on a

$$c\mathbb{P}\big(\min\{Z_1,\dots,Z_{L_n}\} \geqslant 0\big) \leqslant \mathbb{P}(T_0 > n) \leqslant \mathbb{P}\big(\min\{Z_1,\dots,Z_{L_n}\} \geqslant 0\big),$$

où $c = \mathbb{P}(X_1 > 0 \mid X_1 \neq 0)$. Rappel : $Z_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

Problème : $(Y_j)_{j \geqslant 0}$ et $L_n$ ne sont pas indépendants.

Si $f$ est impaire et $(X_i)_{i \geqslant 0}$ est symétrique.

$\rightsquigarrow$ les $Y_j = \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} f(X_i)$ sont des v.a. symétriques (i.i.d.).

# Ordre de grandeur dans le cas symétrique

Théorème (Sparre Andersen '54, voir aussi Feller)

*Si les* $(Y_j)_{1 \leqslant j \geqslant k}$ *sont i.i.d. symétriques et sans atomes :*

$$\mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_k\} \geqslant 0\big) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

*Si la loi possède des atomes*

$$\mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_k\} > 0\big) \geqslant \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} \geqslant \mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_k\} \geqslant 0\big).$$

On voudrait l'appliquer à $\mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_k\} \geqslant 0 \mid \tau_k = a\big)$...

Le résultat reste vrai si $(Y_1, \dots, Y_k)$ *échangeable* + *invariant par signe*!

$$\mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_k\} \geqslant 0 \mid \tau_k = a\big) \asymp k^{-1/2}.$$

Donc $$\mathbb{P}\big(\min\{Z_1, \dots, Z_{L_n}\} \geqslant 0\big) \asymp \mathbb{E}\big[L_n^{-1/2}\big].$$

1. Introduction

2. Persistance de marches aléatoires intégrées
   - Quelques heuristiques
   - Aperçu rapide de la littérature

3. Modèle continu
   - Aperçu de la littérature
   - Découpage des trajectoires
   - Résultats

## $(X_i)_{i\geqslant 0}$ marche aléatoire, $\zeta_n = \sum_{i=1}^n X_i,\ T_0 = \min\{n, \zeta_n < 0\}$

$\Delta_i = X_i - X_{i-1}$ v.a. réelles i.i.d. et centrées.

*Sinai '91.* $\mathbb{P}(T_0 > n) \asymp n^{-\frac{1}{4}}$ pour la marche aléatoire simple.

*Dembo, Ding, Gao '14.* $\mathbb{P}(T_0 > n) \asymp n^{-\frac{1}{4}}$ si $\mathbb{E}(\Delta_i^2) < +\infty$.

*Denisov, Wachtel '15.* $\mathbb{P}(T_0 > n) \sim cn^{-\frac{1}{4}}$ si $\mathbb{E}(\Delta_i^{2+\varepsilon}) < +\infty$.

Idée générale : considérer $(\zeta_n, X_n)_{n\geqslant 0}$, qui est un processus de Markov.

## $(X_t)_{t \geqslant 0}$ Markov, $\zeta_t = \int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s$, $T_y := \inf\{t, \zeta_t \leqslant y\}$

- Mouvement Brownien Intégré : $\zeta_t = \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s$.

*Lachal '91.* Densité explicite de $(T_y, B_{T_y})$.

*Groeneboom, Jongbloed, Wellner '99.* $\mathbb{P}(T_y > t) \sim c|y|^{1/2} t^{-1/4}$.

- Fonction puissance : $f(x) = c_+ x^\gamma$ si $x > 0$ et $f(x) = -c_-|x|^\gamma$ si $x < 0$.

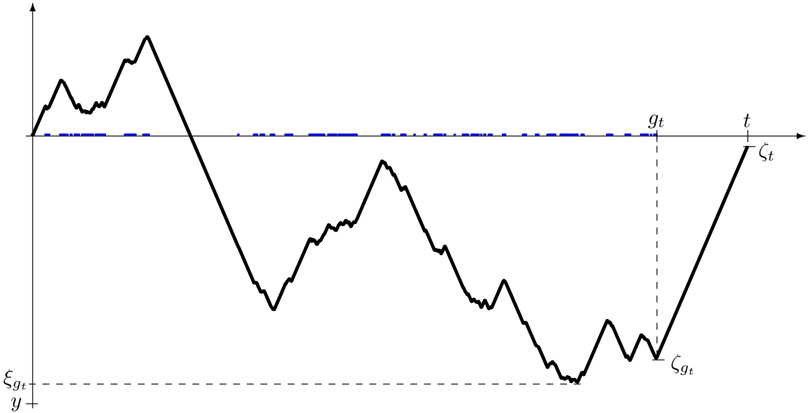
*Isozaki, Kotani '00.* Cas d'un mouvement brownien.
$\mathbb{P}(T_y > t) \sim c|y|^{\rho/(2+\gamma)} t^{-\rho/2}$, où $\rho$ dépend de $\gamma$ et $c_+/c_-$.

*Profeta '19.* Cas d'un Bessel (asymétrique) de dimension $\delta \in [1,2)$.

## $(X_t)_{t \geqslant 0}$ Markov, $\zeta_t = \int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s$, $T_y := \inf\{t, \zeta_t \leqslant y\}$

On pose $\xi_t := \inf_{[0,t]} \zeta_s$.

On note $g_t = \sup\{s < t, X_s = 0\}$ ("dernier retour en 0 à gauche de $t$").




$$\mathbb{P}(T_y > t) = \mathbb{P}(\xi_t > y) = \mathbb{P}\big(\xi_{g_t} > y, \zeta_{g_t} - \xi_{g_t} + \zeta_t - \zeta_{g_t} > y - \xi_{g_t}\big)\,.$$

# Quelques simplifications

*Un truc classique.* Soit $\mathrm{e} \sim \mathrm{Exp}(q)$ indépendante de $(X_t)_{t \geqslant 0}$.
Considérer $\mathbb{P}(\xi_e > y) \rightsquigarrow$ transformée de Laplace de $\mathbb{P}(\xi_t > y)$.

*Conséquence 1.*

**Lemme**

$(X_s)_{0 \leqslant s \leqslant g_{\mathrm{e}}}$ *et* $(X_{g_{\mathrm{e}}+s})_{0 \leqslant s \leqslant \mathrm{e}-g_{\mathrm{e}}}$ *sont indépendants.*

*Conséquence 2.*

**Lemme**

$\xi_{g_{\mathrm{e}}}$ *et* $\zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_{\mathrm{e}}}$ *sont indépendantes.*

# Quelques simplifications

Conclusion :

$$\mathbb{P}(\xi_{\mathrm{e}} > y) = \mathbb{P}\big(\xi_{g_{\mathrm{e}}} > y, \zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_{\mathrm{e}}} + \zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}} > y - \xi_{g_{\mathrm{e}}}\big)$$
$$\approx \mathbb{P}\big(\xi_{g_{\mathrm{e}}} > y\big)\mathbb{P}(\zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_{\mathrm{e}}} + \zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}} \geqslant 0)\,.$$

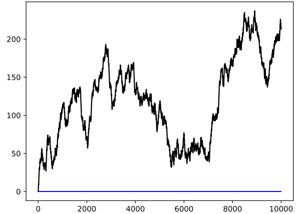
Comprendre $\mathbb{P}\big(\xi_{g_{\mathrm{e}}} > y\big)$ et $\mathbb{P}(\zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}} \geqslant \xi_{g_{\mathrm{e}}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}})$, où $\mathrm{e} \sim \mathrm{Exp}(q)$.

Le but est de montrer que, quand $q \downarrow 0$ :

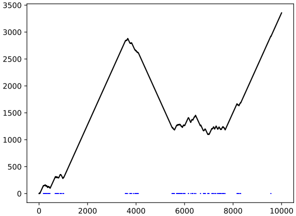
- $\mathbb{P}(\xi_{g_{\mathrm{e}}} > y) \sim c_0(y)\ell(q)q^{-\theta}$ ;
- $\mathbb{P}(\zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}} \geqslant \zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_e}) \to c_1 \in (0,1]$.

# À propos de $c_1$ : quelques simulations

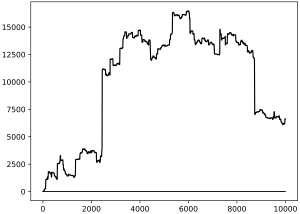
Paramètres pour jouer : a) sur le temps local $L_t$ ; b) sur l'intégrabilité de $f$.



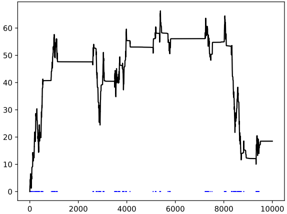

$c_1 = 1$




$c_1 < 1$




$c_1 = 1$




$c_1 = 1$

# À propos de $\mathbb{P}(\xi_{g_e} > y)$

Outil : $Z_t := \int_0^{\tau_t} f(X_s)\,\mathrm{d}s = \sum_{s \leqslant t} \int_{\tau_s^-}^{\tau_s} f(X_u)\,\mathrm{d}u$, processus de Lévy — $\mathbb{P}(\xi_{g_e} > y) = \mathbb{P}(\inf_{[0,L_e]} Z_s > y)$.

Note : $(\tau_t, Z_t)_{t \geqslant 0}$ est un Lévy bidimensionnel.

On note $\Phi(\lambda) := -\log \mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_1}]$ l'exposant de Laplace de $\tau_1$.

**Théorème**

*On a* $\mathbb{P}(\xi_{g_e} > y) \sim \mathcal{V}(y) \cdot \Phi(\kappa(q))$ *quand* $q \downarrow 0$.

*On a équivalence entre :*

- $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(Z_t < 0) = \rho \in (0,1)$ ;
- $\kappa$ *est à variations régulières d'exposant* $\rho$.

# À propos de la constante $c_1 = \lim_{q\downarrow 0} \mathbb{P}(\zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}} \geqslant \zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_{\mathrm{e}}})$

### Théorème

- *Si $(X_t)$ est récurrent positif, on a $c_1 = 1$ ;*
- *Si $(Z_t)$ est dans le domaine d'attraction gaussien, alors $c_1 = 1$ ;*
- *Si $(\tau_t, Z_t)$ converge vers $(\tau_t^o, Z_t^o)$, un Lévy $(\beta, \alpha)$-stable pour $\beta \in (0,1), \alpha \in (0,2)$, alors $c_1 = \mathbb{P}(W \geqslant U)$.*

*($W, U$ sont les limites en loi de $\zeta_{\mathrm{e}} - \zeta_{g_{\mathrm{e}}}, \zeta_{g_{\mathrm{e}}} - \xi_{g_{\mathrm{e}}}$, avec la bonne normalisation.)*

### Théorème

*Dans les trois cas précédents, $\mathbb{P}(T_y > t) = \mathbb{P}(\xi_t > y) \sim c_1 \mathcal{V}(y)\ell(t)t^{-\beta\rho}$.*

- $c_1 = 1$, $\beta = 1$, $\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{P}(Z_s < 0)\,\mathrm{d}s$ ;
- $c_1 = 1$, $(\tau_t)$ *dans le domaine d'attraction d'une loi* $\beta$*-stable,* $\rho = 1/2$ ;
- $c_1 = \mathbb{P}(W \geqslant U)$, $\beta \in (0,1)$, $\rho = \mathbb{P}(Z_1^o < 0)$.

# Applicabilité ?

Exemple qui vérifie les hypothèses : $\zeta_t = \int_0^t f(X_s)\,\mathrm{d}s$

- $X_t$ est un (skew-)Bessel de dimension $\delta \in (0,2)$ ;
- $f(x) = \begin{cases} c_+|x|^\gamma \text{ si } x > 0, \\ -c_-|x|^\gamma \text{ si } x > 0, \end{cases}$ pour un $\gamma > -\delta$.

Calculs explicites : $\beta = \frac{2-\delta}{2}$, $\alpha = \frac{2-\delta}{2+\gamma}$, $\rho = \frac{1}{\pi\alpha} \arctan\big(\frac{\sin(\alpha\pi)}{(c_+/c_-)^\alpha + \cos(\alpha\pi)}\big)$.

$\rightsquigarrow$ Processus d'Itô–McKean (diffusions, marches à temps continu).
Conditions sur la "scale function", la "speed measure" et la fonction $f$.

Problèmes ouverts ?

- Déterminer la queue de distribution de $M = \int_0^T f(X_s)\,\mathrm{d}s$.
- Traiter le cas où on peut changer de signe à l'intérieur d'une excursion...
  - Processus qui ne touchent pas 0,
  - Marches aléatoires à temps discret...

# Merci !