

# Automates cellulaires et phénomènes d'auto-organisation

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, Nancy, France

Journées MAS  
Mercredi 31 août 2022



**Automates cellulaires** : modèle mathématique permettant de décrire des **systèmes complexes**, constitués d'un grand nombre d'entités qui évoluent en fonction de ce qu'elles observent autour d'elles.

**Exemples :**

- Tissus cellulaires
- Trafic routier
- Propagation de feux de forêts ou d'épidémies
- Formation de bancs de poissons ou d'essaims d'oiseaux



Des règles locales simples peuvent mener à une forme d'**émergence**.

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

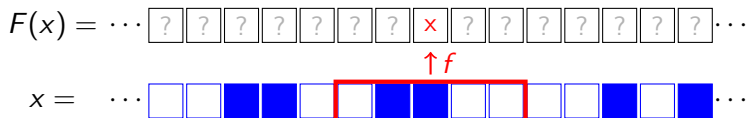
Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini de symboles.

Une **configuration** de dimension  $d$  est un élément de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ , i.e. une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , avec  $x_k \in \mathcal{A}$  pour  $k \in \mathbb{Z}^d$ .

## Définition

Une fonction  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  est un **automate cellulaire** s'il existe un ensemble fini  $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^d$  appelé le **voisinage** et une **fonction locale**  $f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{A}$  tels que :

$$\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)_k = f((x_{k+i})_{i \in \mathcal{N}}).$$



$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\}, \quad \mathcal{N} = \{-2, \dots, 2\}$$

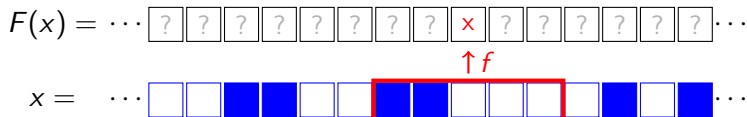
Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini de symboles.

Une **configuration** de dimension  $d$  est un élément de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ , i.e. une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , avec  $x_k \in \mathcal{A}$  pour  $k \in \mathbb{Z}^d$ .

## Définition

Une fonction  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$  est un **automate cellulaire** s'il existe un ensemble fini  $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^d$  appelé le **voisinage** et une **fonction locale**  $f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{A}$  tels que :

$$\forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)_k = f((x_{k+i})_{i \in \mathcal{N}}).$$



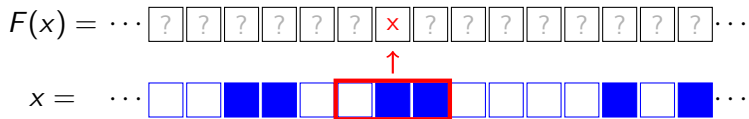
$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\}, \quad \mathcal{N} = \{-2, \dots, 2\}$$

- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.

$$F(x) = \cdots \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \cdots$$

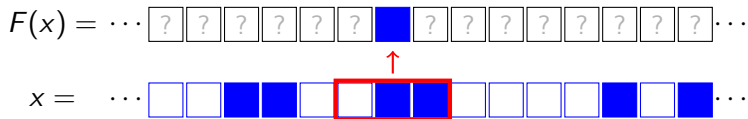
$$x = \cdots \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \cdots$$

- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.

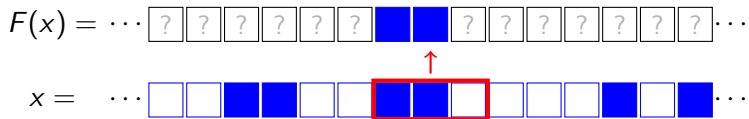




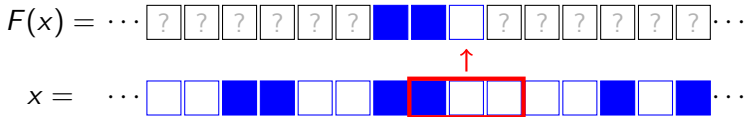
- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.



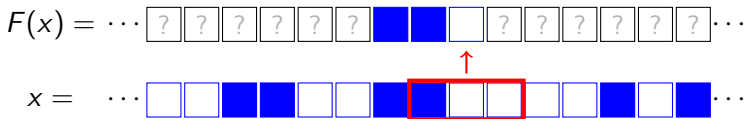
- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.



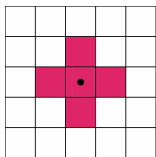
- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.



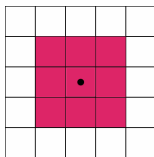
- AC de la majorité en dim. 1, avec un rayon 1 : chaque cellule observe sa propre couleur et la couleur de ses deux voisines ; la nouvelle couleur est la couleur majoritaire parmi les trois.



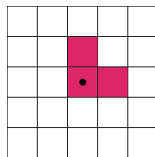
- AC de la majorité en dimension 2, pour différents voisinages.



Von Neumann



Moore



Toom

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de  $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ , la probabilité de chaque symbole.

$$f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$$F(x) = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & x & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \cdots$$
$$x = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \cdots$$

↑  
*f*

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de  $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ , la probabilité de chaque symbole.

$$f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$$F(x) = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & x & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \cdots$$
$$x = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \cdots$$

↑  
*f*

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de  $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ , la probabilité de chaque symbole.

$$f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$$

$$F(x) = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & x & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \cdots$$

$\uparrow f$

$$x = \cdots \begin{array}{cccccccccccccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \cdots$$

Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , la probabilité de chaque symbole.

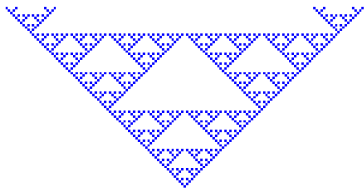
$$f : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$$

$$F(x) = \cdots \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{x} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \cdots$$

$$x = \cdots \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \cdots$$

↑  
*f*

**Exemple :** AC de la somme modulo 2 avec probabilité  $\varepsilon$  d'erreur.



$$\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon = 0.01$$



Pour les AC **probabilistes**, la fonction locale donne, pour chaque élément de  $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ , la probabilité de chaque symbole.

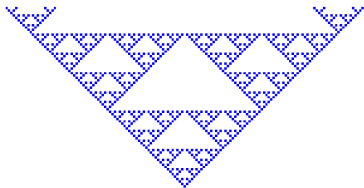
$$f : \mathcal{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad F : \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d})$$

$$F(x) = \cdots \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{x} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \boxed{?} \cdots$$

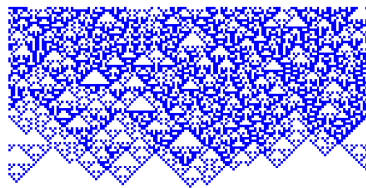
$$x = \cdots \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \boxed{\phantom{?}} \cdots$$

↑  
*f*

**Exemple :** AC de la somme modulo 2 avec probabilité  $\varepsilon$  d'erreur.



$$\varepsilon = 0$$



$$\varepsilon = 0.01$$

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

Les AC sont des fonctions très **simples**...

## Théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon (1969)

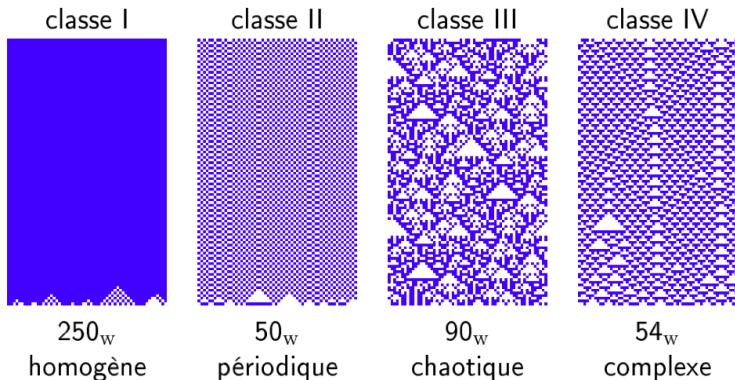
$F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  est un automate cellulaire si et seulement si  $F$  est une fonction **continue** qui commute avec le **décalage**  $\sigma$ .

**Décalage** :  $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  défini par  $\forall k \in \mathbb{Z}, \sigma(x)_k = x_{k-1}$ .

**Distance sur  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$**  :  $d(x, y) = 2^{-\min\{|k|; x_k \neq y_k\}}$ .

...et très **compliquées** !

## Classification de Wolfram (1981)

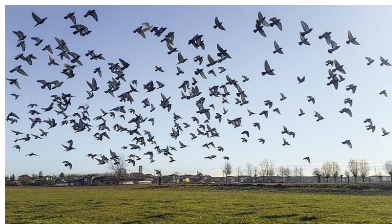
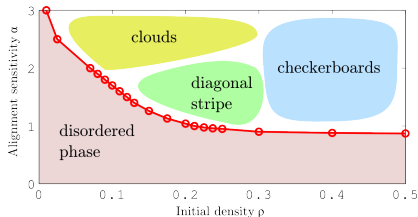
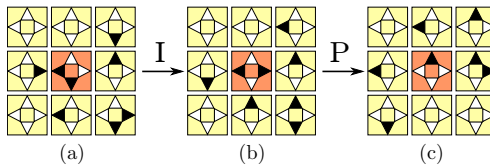


(Image : N. Fatès)

- **Informatique** : **modèle de calcul** distribué ayant la puissance des machines de Turing, question de la **robustesse aux erreurs** d'un calcul.
- **Probabilités** : liens avec la percolation et avec d'autres modèles de **physique statistique**.
  - Étude de l'évolution d'AC à partir de configurations aléatoires.
  - Question de l'ergodicité des ACP.

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

Modèle étudié par O. Bouré, V. Chevrier, N. Fatès (2012-2018)



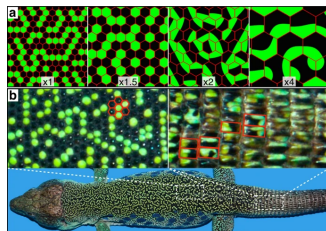
## A living mesoscopic cellular automaton made of skin scales

[Liana Manukyan](#), [Sophie A. Montandon](#), [Anamarija Fofonjka](#), [Stanislav Smirnov](#) & [Michel C. Milinkovitch](#)



*Nature* **544**, 173–179 (2017) | [Cite this article](#)

18k Accesses | 68 Citations | 707 Altmetric | [Metrics](#)



**Conclusion du résumé :** *Our study indicates that cellular automata are not merely abstract computational systems, but can directly correspond to processes generated by biological evolution.*



**Objectif** : identifier des mécanismes simples entraînant une forme d'**auto-organisation**.

Étude de “**problèmes inverses**” : étant donné un comportement, chercher l'AC le plus simple possible permettant d'obtenir ce comportement.

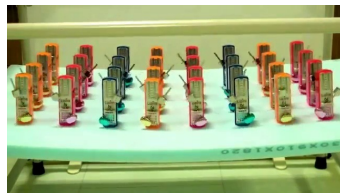
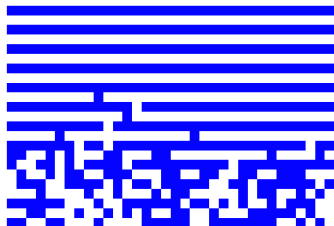
**Déclinaisons** :

- grille finie / infinie
- automates cellulaires déterministes / probabilistes

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

Existe-t-il un automate cellulaire synchronisant ?



Un AC(P) sur  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$  **synchronise** les configurations finies si :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad \exists T \geq 1,$$

$$\forall k \geq 1, \quad F^{T+2k}(x) = 0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad F^{T+2k+1}(x) = 1^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{ccc} & y_1 & \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{array}$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{cccc} & & y_1 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 \end{array}$$



## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 \end{array}$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard] :* pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{cccccc} & y_1 & y_2 & & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 & y_2 & \end{array}$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 & y_2 \end{array}$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots \end{array}$$

## Proposition

Il n'existe pas d'AC **déterministe** synchronisant.

*Démo [Gaétan Richard]* : pour tout AC  $F$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel on peut trouver une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que  $F(x)$  est un translaté de  $x$ .

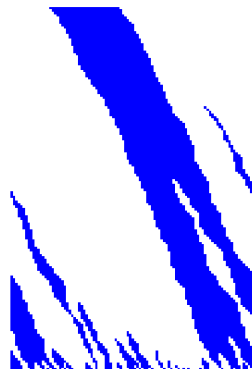
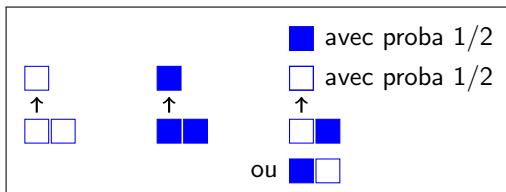
$$\begin{array}{ccccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots \end{array}$$

On finit par voir une séquence  $y_i y_{i+1} y_{i+2}$  qu'on a déjà vue, ce qui permet de construire une configuration périodique.

## Proposition

Il existe un AC **probabiliste** synchronisant les configurations finies.

Règle locale  $f(x, y) = \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y$

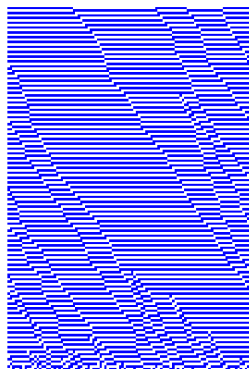
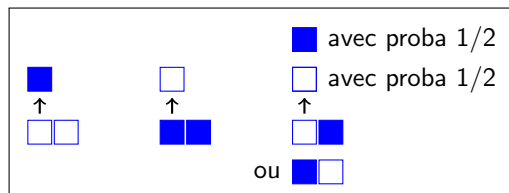


★ Temps quadratique. Peut-on faire mieux ? ★

## Proposition

Il existe un AC **probabiliste** synchronisant les configurations finies.

Règle locale  $f(x, y) = \frac{1}{2}\delta_{1-x} + \frac{1}{2}\delta_{1-y}$



★ *Temps quadratique. Peut-on faire mieux ?* ★

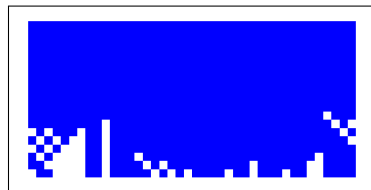
- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances



Existe-t-il un automate cellulaire qui classe la densité ?



Majorité de cellules blanches



Majorité de cellules bleues

On note  $\rho(x) = \sum_{i=1}^n x_i/n$  la proportion de 1 dans  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ .

Un AC(P) sur  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$  **classifie** la densité si :  $\forall n \geq 1, \forall x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ,

$$\rho(x) > 1/2 \implies \exists T \geq 1, \forall k \geq T, F^k(x) = 1^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

$$\rho(x) < 1/2 \implies \exists T \geq 1, \forall k \geq T, F^k(x) = 0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

Problème de **recherche de consensus** dans un réseau distribué : comment faire **émerger** une information globale en collectant seulement une information locale à chaque étape ?

## Difficultés :

- il n'est pas possible de centraliser l'information (les cellules sont indistinguables),
- il n'est pas possible d'utiliser des techniques de comptage classique (les cellules peuvent seulement mémoriser leur couleur).

- Les AC de type **majorité** (avec un rayon  $r \geq 1$ ) ne classifient pas la densité.



- L'AC **GKL** (Gács-Kurdyumov-Levin) est défini par :
  - $F(x)_n = \text{maj}(x_n, x_{n+1}, x_{n+3})$  si  $x_n = 1$ ,
  - $F(x)_n = \text{maj}(x_n, x_{n-1}, x_{n-3})$  si  $x_n = 0$ .

Cet AC a de bonnes propriétés statistiques mais ne répond pas non plus parfaitement au problème.



Proposition [Land-Belew 1995, Bušić-Fatès-Mairesse-M. 2013]

Il n'existe pas d'AC(P) qui classifie parfaitement la densité.

Proposition [Land-Belew 1995, Bušić-Fatès-Mairesse-M. 2013]

Il n'existe pas d'AC(P) qui classe parfaitement la densité.

*Démo* : on suppose qu'il y a une configuration  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  telle que

$$\frac{n}{2} < |x|_1 < |F(x)|_1.$$

On considère une configuration du type :

$$y = \underbrace{\overbrace{x \ x \ \dots \ x}^k}_{\leftarrow \quad \rightarrow} \quad \underbrace{\overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^m}_{\leftarrow \quad \rightarrow}.$$

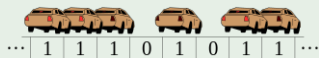
On peut régler  $k$  et  $m$  pour avoir  $\rho(y) < \frac{1}{2}$  et  $\rho(F(y)) > \frac{1}{2}$ .

Mais avec les ACP, on peut répondre au problème avec une précision arbitrairement grande.

On définit l'ACP **majorité-traffic** de paramètre  $\alpha \in (0, 1)$  par :

$$f(x, y, z) = \alpha \delta_{\text{maj}(x, y, z)} + (1 - \alpha) \delta_{\text{traf}(x, y, z)},$$

où  $\text{traf}(x, y, z)$  est défini par :



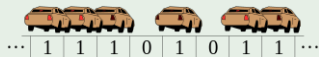
1	0	1	1	1	0	0	0
111	110	101	100	011	010	001	000

Mais avec les ACP, on peut répondre au problème avec une précision arbitrairement grande.

On définit l'ACP **majorité-traffic** de paramètre  $\alpha \in (0, 1)$  par :

$$f(x, y, z) = \alpha \delta_{\text{maj}(x, y, z)} + (1 - \alpha) \delta_{\text{traf}(x, y, z)},$$

où  $\text{traf}(x, y, z)$  est défini par :



1	0	1	1	1	0	0	0
111	110	101	100	011	010	001	000

Exemple :

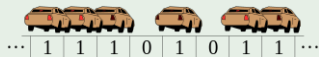


Mais avec les ACP, on peut répondre au problème avec une précision arbitrairement grande.

On définit l'ACP **majorité-traffic** de paramètre  $\alpha \in (0, 1)$  par :

$$f(x, y, z) = \alpha \delta_{\text{maj}(x,y,z)} + (1 - \alpha) \delta_{\text{traf}(x,y,z)},$$

où  $\text{traf}(x, y, z)$  est défini par :



1	0	1	1	1	0	0	0
111	110	101	100	011	010	001	000

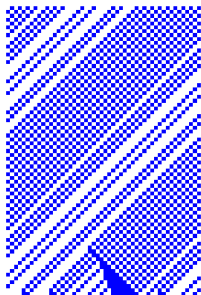
Exemple :



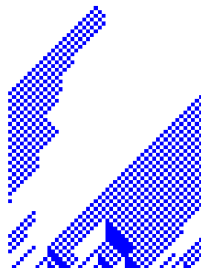


## Proposition [Fatès 2011]

Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ , il existe un choix  $\alpha_n \in (0, 1)$  tel que pour toute configuration  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^n}$ , l'ACP converge vers la "bonne" configuration avec probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ .



Trafic



Majorité-traffic

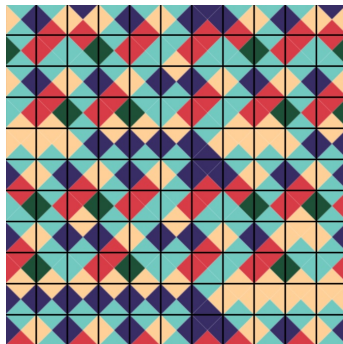
★ *Quid de la dimension 2 ?* ★

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances

Jeu de **tuiles** :



On agence les tuiles en respectant les contraintes d'adjacence :



(Image : IdM)

On note  $\Sigma$  l'ensemble des configuration autorisées sur  $\mathbb{Z}^2$ .  
On dit que  $\Sigma$  est un **sous-décalage de type fini (SFT)**.

Est-il possible de construire un AC  $F$  qui corrige les erreurs de  $\Sigma$  ?

On note  $\Sigma$  l'ensemble des configurations autorisées sur  $\mathbb{Z}^2$ .  
On dit que  $\Sigma$  est un **sous-décalage de type fini (SFT)**.

Est-il possible de construire un AC  $F$  qui corrige les erreurs de  $\Sigma$  ?

On cherche un AC  $F$  tel que :

- pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $F(x) = x$ ,
- pour toute configuration  $\tilde{x}$  obtenue en partant d'une configuration  $x \in \Sigma$  et en modifiant un nombre fini de cellules, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F^n(\tilde{x}) \in \Sigma$ .

Travail en collaboration avec Nazim Fatès et Siamak Taati.

*Self-stabilisation of cellular automata on tilings.*

Fundamenta Informaticae, 2022

Comment concevoir des systèmes présentant une forme d'auto-stabilisation ?

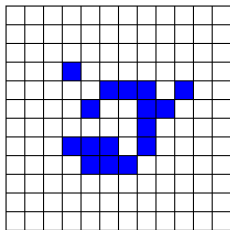
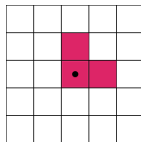
**Motivation** : les organismes vivants ont généralement une certaine capacité à “s’auto-réparer” quand ils sont soumis à une perturbation. Pour les systèmes informatiques, c’est moins souvent le cas...

- Explorer la frontière entre **local** / **non-local**.
- Distinguer ce qui peut être fait de manière **déterministe** / ce qui nécessite de l'**aléa**.
- Une nouvelle manière d'évaluer la **complexité** d'un pavage.

## Configurations monochromatiques

$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\} \text{ et } \Sigma = \{\square^{\mathbb{Z}^2}, \blacksquare^{\mathbb{Z}^2}\}$$

L'AC de la majorité de Toom fournit  
une solution.

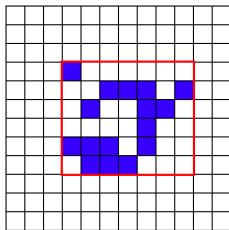
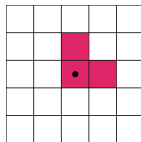


Rectangle de taille  $m \times n$  :  
les cellules bleues sont  
effacées en au plus  $m + n$   
étapes.

## Configurations monochromatiques

$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\} \text{ et } \Sigma = \{\square^{\mathbb{Z}^2}, \blacksquare^{\mathbb{Z}^2}\}$$

L'AC de la majorité de Toom fournit  
une solution.



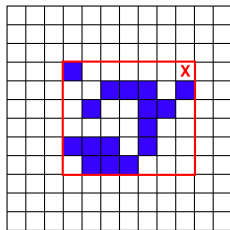
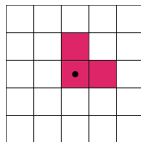
Rectangle de taille  $m \times n$  :  
les cellules bleues sont  
effacées en au plus  $m + n$   
étapes.



## Configurations monochromatiques

$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\} \text{ et } \Sigma = \{\square^{\mathbb{Z}^2}, \blacksquare^{\mathbb{Z}^2}\}$$

L'AC de la majorité de Toom fournit  
une solution.

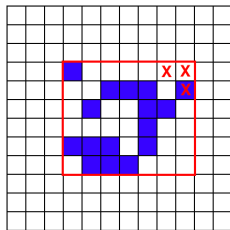
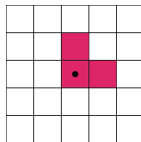


Rectangle de taille  $m \times n$  :  
les cellules bleues sont  
effacées en au plus  $m + n$   
étapes.

## Configurations monochromatiques

$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\} \text{ et } \Sigma = \{\square^{\mathbb{Z}^2}, \blacksquare^{\mathbb{Z}^2}\}$$

L'AC de la majorité de Toom fournit  
une solution.

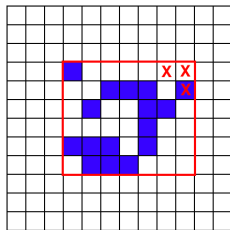
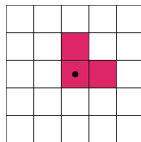


Rectangle de taille  $m \times n$  :  
les cellules bleues sont  
effacées en au plus  $m + n$   
étapes.

## Configurations monochromatiques

$$\mathcal{A} = \{\square, \blacksquare\} \text{ et } \Sigma = \{\square^{\mathbb{Z}^2}, \blacksquare^{\mathbb{Z}^2}\}$$

L'AC de la majorité de Toom fournit  
une solution.



Rectangle de taille  $m \times n$  :  
les cellules bleues sont  
effacées en au plus  $m + n$   
étapes.

L'AC de Toom permet aussi de corriger des erreurs aléatoires !



$p=0.2$

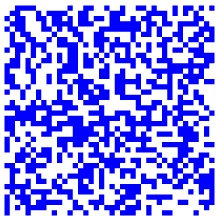
évolution  
→  
 $t \rightarrow \infty$



$p=0.8$

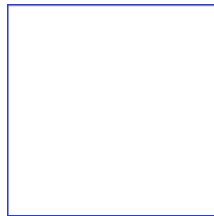
évolution  
→  
 $t \rightarrow \infty$





$p=0.49$

évolution  
→  
 $t \rightarrow \infty$

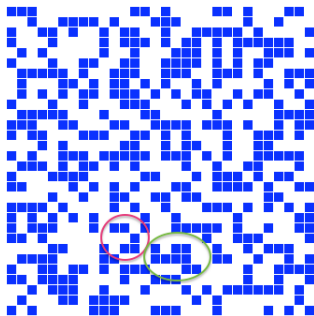


$p=0.51$

évolution  
→  
 $t \rightarrow \infty$



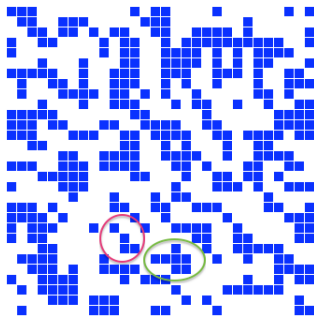
On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.  
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 0$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

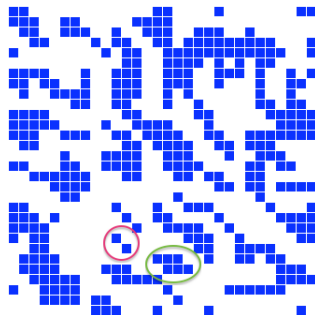
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 1$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.

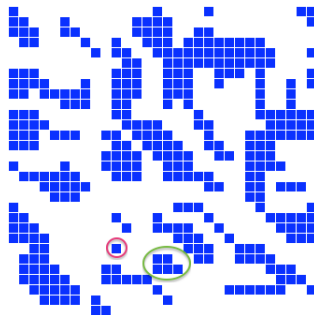


$t = 2$



On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

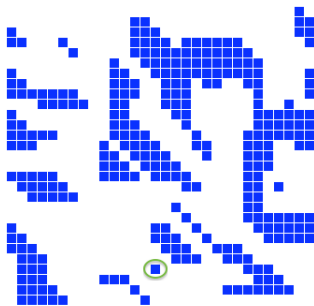
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 3$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

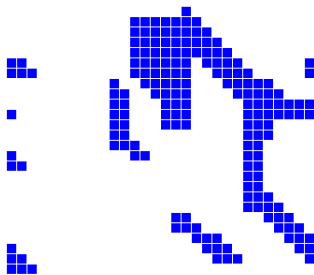
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 5$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

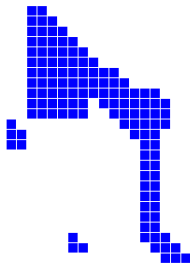
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 10$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.

Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



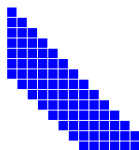
$t = 15$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.  
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 20$

On suppose  $p < 1/2$ . À partir d'une cellule bleue, on s'autorise à faire des pas dans l'une des six directions : N, E, S, O, N-O, S-E.  
Théorie de la **percolation** : les îlots de cellules bleues sont finis.



$t = 30$

★ *Quid de la dimension 1 ?* ★

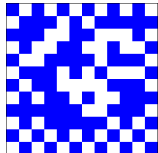
**Extension aux SFTs finis** : si  $\Sigma$  est fini, les config. ont une période commune (horiz. et vert.) et l'AC  $F$  ci-dessous convient :

$$F(x)_k = \text{maj}(x_k, x_{k+N_1 e_1}, x_{k+N_2 e_2})$$

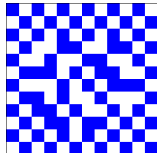
**Extension aux SFTs finis** : si  $\Sigma$  est fini, les config. ont une période commune (horiz. et vert.) et l'AC  $F$  ci-dessous convient :

$$F(x)_k = \text{maj}(x_k, x_{k+N_1 e_1}, x_{k+N_2 e_2})$$

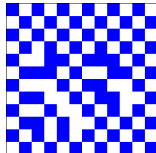
**Exemple** : damiers (2-coloriage)



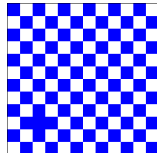
$t = 0$



$t = 2$



$t = 4$



$t = 10$

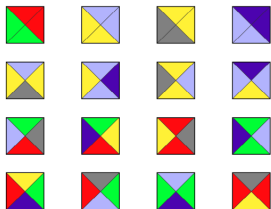
Correction en temps linéaire.



## Pavages Nord-Est déterministes

Pavages tels que la valeur d'une cellule est imposée par la valeur de ses voisines Nord et Est.

Jeu de tuiles d'Ammann

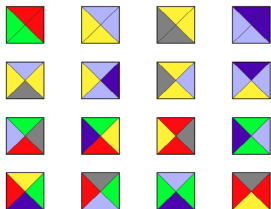


SFT aperiodique

## Pavages Nord-Est déterministes

Pavages tels que la valeur d'une cellule est imposée par la valeur de ses voisins Nord et Est.

Jeu de tuiles d'Ammann



SFT aperiodique

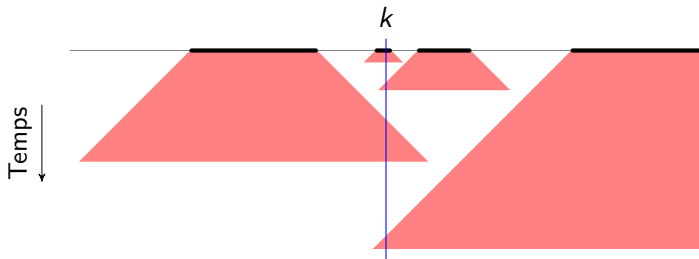
SFT de Ledrappier

$$\Sigma = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall k \in \mathbb{Z}^2, \\ x_k = x_{k+e_1} + x_{k+e_2} \pmod{2}\}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

## Autre résultats obtenus :

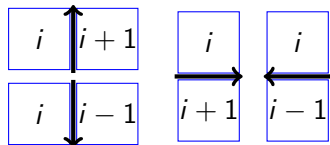
- Autres exemples de pavages qu'on peut corriger en temps linéaire ou polynomial.
- Exemples pour lesquels des ACP permettent de corriger plus vite / avec des règles plus symétriques.
- Existence de pavages qu'il n'est pas possible de corriger en temps polynomial (si  $P \neq NP$ ).
- Si on peut corriger en temps linéaire les perturbations finies, on peut aussi corriger les petites perturbations aléatoires.



1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0

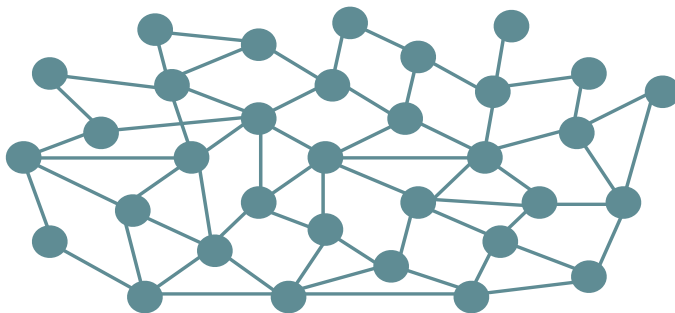
★ *Quid des 3-coloriages ?* ★

1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	2	0	1	2	0



★ *Quid des 3-coloriages ?* ★

- 1 Introduction
  - Définition des automates cellulaires
  - Motivations mathématiques
  - Exemples de modélisation de systèmes complexes
- 2 Problèmes inverses sur des grilles finies : le rôle de l'aléa
  - Problème de la synchronisation
  - Problème de la classification de la densité
- 3 Correction de pavages
- 4 Diagnostic de défaillances



neutre

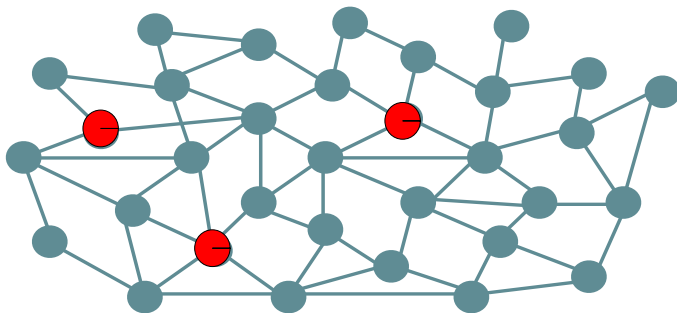


défaut



alerte





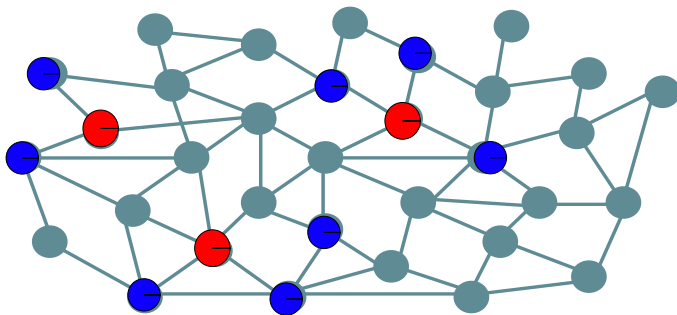
neutre



défaut



alerte



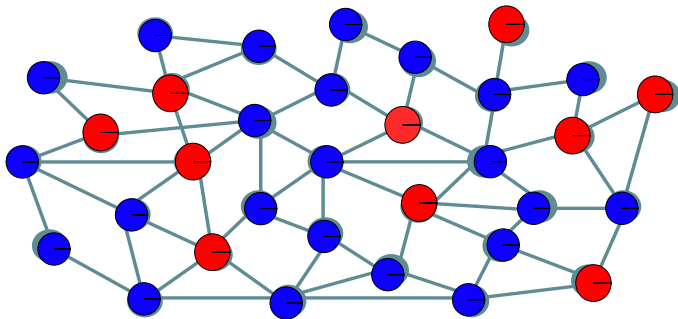
neutre



défaut



alerte



neutre



défaut



alerte

Grille  $\mathbb{Z}^2$ , sur laquelle chaque cellule peut prendre 3 états :

- **N** : normal,
- **D** : défaillant (il s'agit d'un état fixe),
- **A** : alerte.

## Objectif

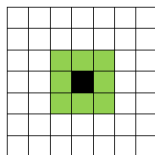
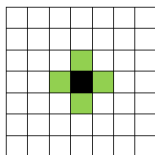
Chercher une règle locale la plus simple possible telle qu'à partir d'une configuration initiale avec des cellules **N** et **D**, l'état **A** envahit la grille si et seulement si la proportion d'états **D** dépasse un certain seuil (qu'on souhaite pouvoir choisir).

- Si toutes les voisines sont **N**, le nouvel état est **N**.
- Si toutes les voisines sont **A** ou **D**, le nouvel état est **A**.
- Sinon, le nouvel état de la cellule est :

$$\mathbf{N} \text{ avec proba. } \frac{\exp(\lambda n_N)}{\exp(\lambda n_N) + \exp(\lambda(n_A + n_D))}$$

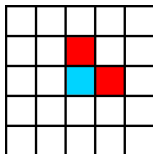
$$\mathbf{A} \text{ avec proba. } \frac{\exp(\lambda(n_A + n_D))}{\exp(\lambda n_N) + \exp(\lambda(n_A + n_D))},$$

où  $n_N$ ,  $n_A$ ,  $n_D$  sont resp. les nb. de voisines **N**, **A**, **D**.



En ajustant la valeur de  $\lambda$ , on peut détecter différents seuils de défaillance.

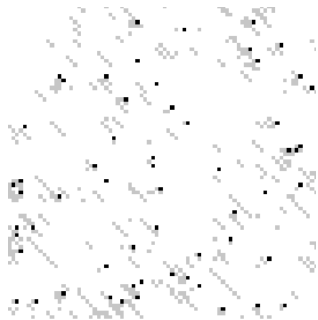
Même règle, mais sur le voisinage de Toom.



On simplifie encore un peu...

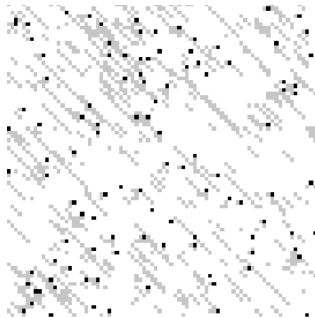
- Si les deux voisines (rouges) sont **N**, le nouvel état est **N**.
- Si les deux voisines (rouges) sont **A** ou **D**, le nouvel état est **A**.
- Sinon, on met **A** avec proba  $p$  et **N** avec proba  $1 - p$ .

Paramètre  $p = 0.4$  (200 itérations)



$$d_D = 0.01$$

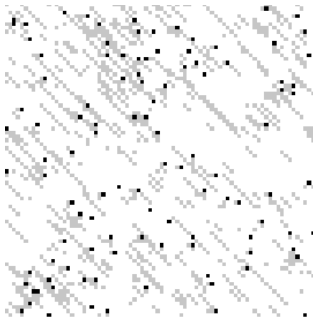
Paramètre  $p = 0.4$  (200 itérations)



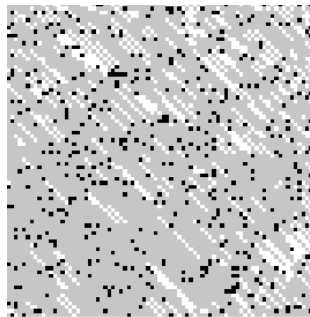
$$d_D = 0.02$$



Paramètre  $p = 0.4$  (200 itérations)



$d_D = 0.02$



$d_D = 0.08$

|| Travail en cours avec Nazim Fatès et Régine Marchand.

- Des **règles locales très simples** peuvent faire émerger des **comportements globaux complexes**.
  - Comment **prédire** l'évolution ?
  - Comment **concevoir** un système ayant un certain comportement ?
- L'**aléa** est parfois **destructeur**, mais il peut aussi être un ingrédient essentiel pour la mise en place d'une forme d'**organisation**.

- Des **règles locales très simples** peuvent faire émerger des **comportements globaux complexes**.
  - Comment **prédire** l'évolution ?
  - Comment **concevoir** un système ayant un certain comportement ?
- L'**aléa** est parfois **destructeur**, mais il peut aussi être un ingrédient essentiel pour la mise en place d'une forme d'**organisation**.

*Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n'y a plus rien à ajouter, mais quand il n'y a plus rien à retrancher. Au terme de son évolution, la machine se dissimule.*

Antoine de Saint-Éxupéry, *Terre des Hommes*, 1939