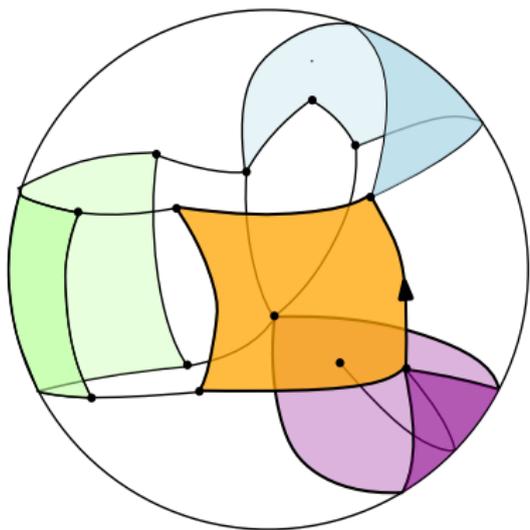


Prix Neveu : Géométrie brownienne

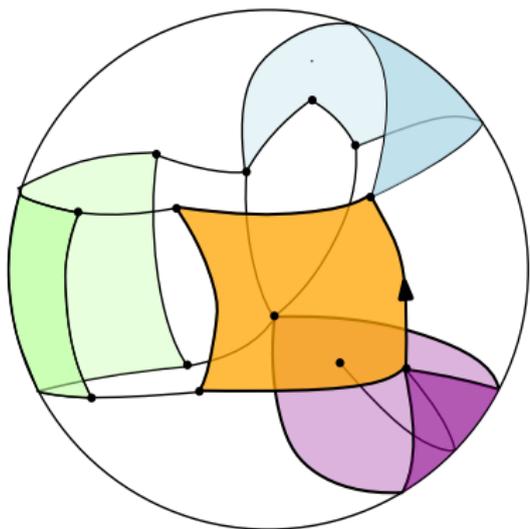
Armand Riera

Universität Zürich

I. Géométrie Aléatoire 2D

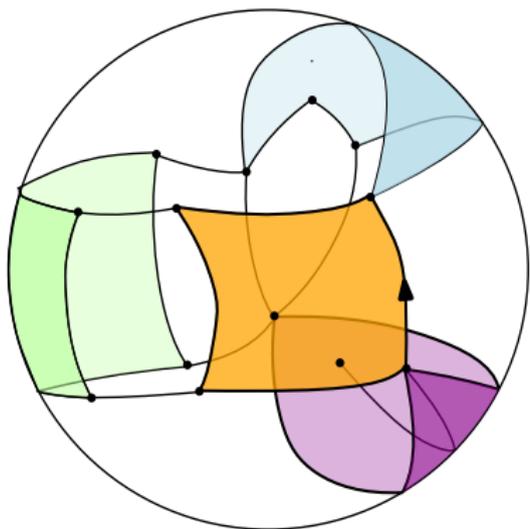


Recollements de polygones
produisant une sphère



Recollements de polygones
produisant une sphère

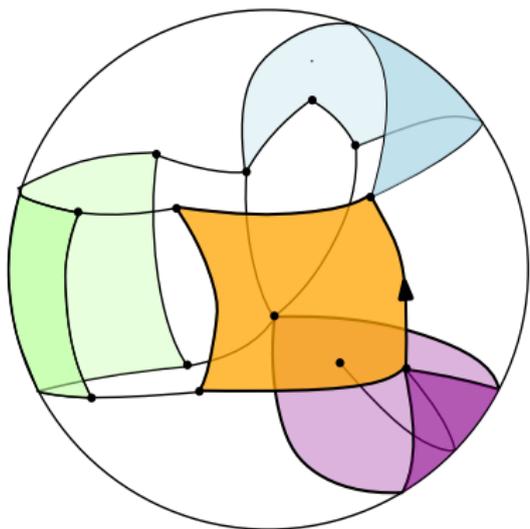
Espaces métriques
compacts



Recollements de polygones
produisant une sphère

Espaces métriques
compacts

Formules énumératives
explicites

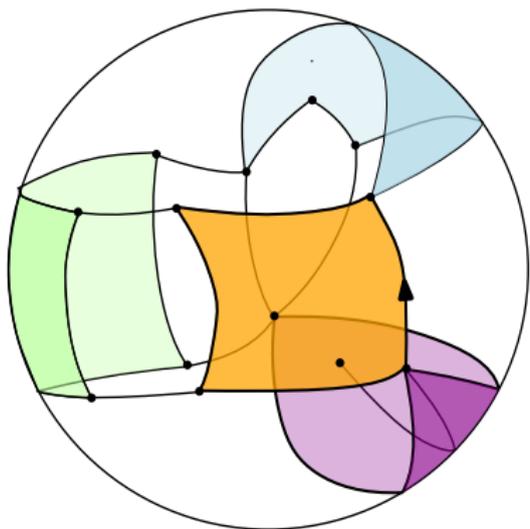


Recollements de polygones
produisant une sphère

Espaces métriques
compacts

Formules énumératives
explicites

Mesures de probabilité
sur différents modèles



Recollements de polygones
produisant une sphère

Espaces métriques
compacts

Formules énumératives
explicites

Mesures de probabilité
sur différents modèles

On peut aussi définir des modèles de physique statistique.

Théorème (Le Gall 2013, Miermont 2013)

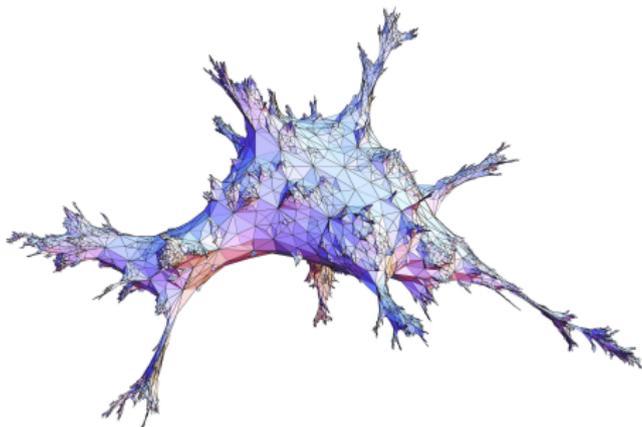
Soit \mathfrak{m}_n une quadrangulation uniforme de la sphère avec n sommets.
Nous avons la convergence suivante :

$$(\mathfrak{m}_n, n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathfrak{m}_n}, \rho_{\mathfrak{m}_n}, \text{vol}_{\mathfrak{m}_n}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{S}, \Delta, \rho_*, V).$$

Théorème (Le Gall 2013, Miermont 2013)

Soit \mathfrak{m}_n une quadrangulation uniforme de la sphère avec n sommets.
Nous avons la convergence suivante :

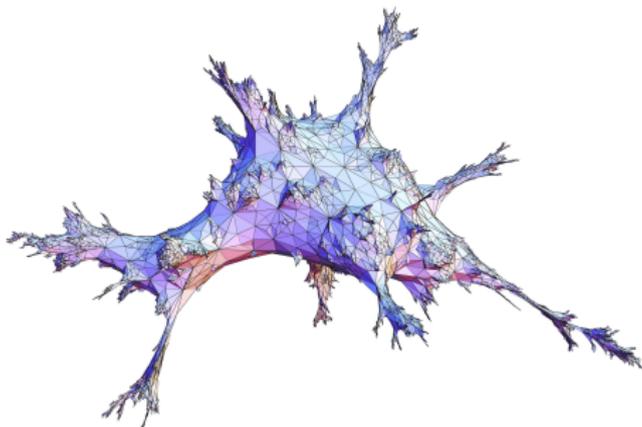
$$(\mathfrak{m}_n, n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathfrak{m}_n}, \rho_{\mathfrak{m}_n}, \text{vol}_{\mathfrak{m}_n}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{S}, \Delta, \rho_*, V).$$



Théorème (Le Gall 2013, Miermont 2013)

Soit \mathfrak{m}_n une quadrangulation uniforme de la sphère avec n sommets.
Nous avons la convergence suivante :

$$(\mathfrak{m}_n, n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathfrak{m}_n}, \rho_{\mathfrak{m}_n}, \text{vol}_{\mathfrak{m}_n}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{S}, \Delta, \rho_*, V).$$

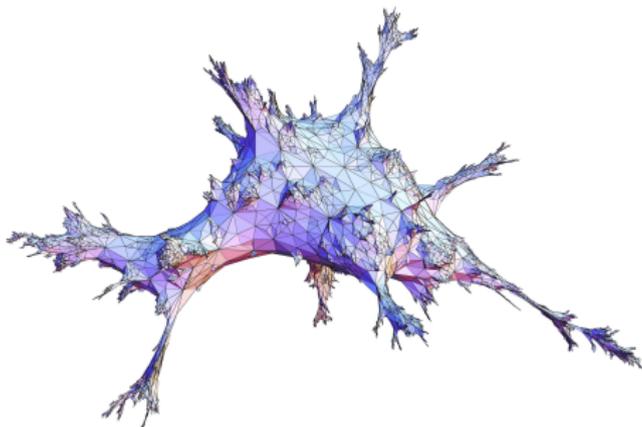


Universalité : Addario-Berry, Albenque, Marzouk...

Théorème (Le Gall 2013, Miermont 2013)

Soit \mathfrak{m}_n une quadrangulation uniforme de la sphère avec n sommets.
Nous avons la convergence suivante :

$$(\mathfrak{m}_n, n^{-\frac{1}{4}} d_{\mathfrak{m}_n}, \rho_{\mathfrak{m}_n}, \text{vol}_{\mathfrak{m}_n}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{S}, \Delta, \rho_*, V).$$

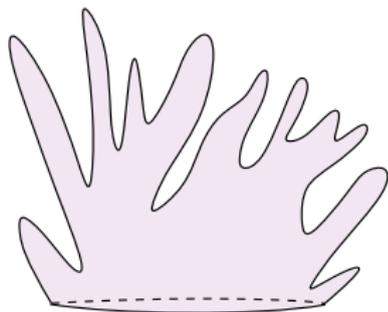


Universalité : Addario-Berry, Albenque, Marzouk...

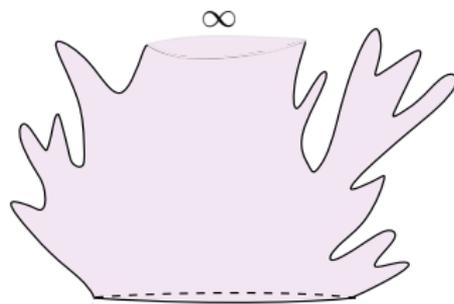
Gravité quantique : Gwynne, Holden, Miller, Sheffield, Sun...

Des surfaces aléatoires apparentées

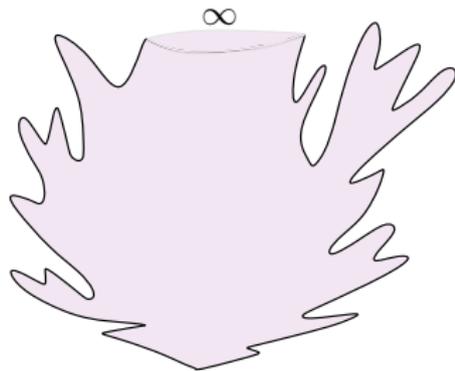
Autres limites d'échelle :



Le disque brownien
Périmètre z



Le disque brownien de volume infini
Périmètre z



Le plan brownien

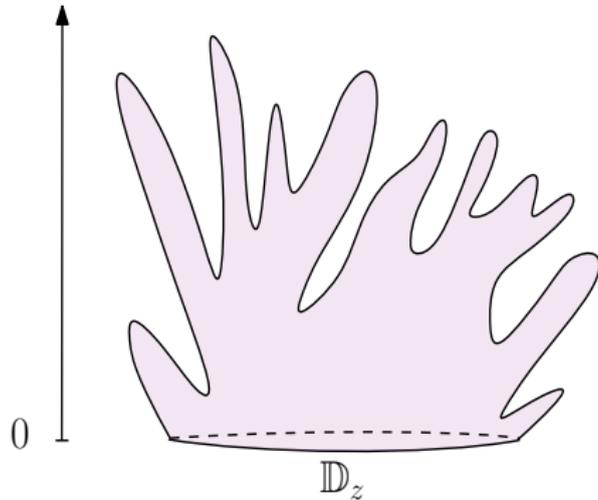


Le demi-plan brownien

II. Une propriété de Markov spatiale

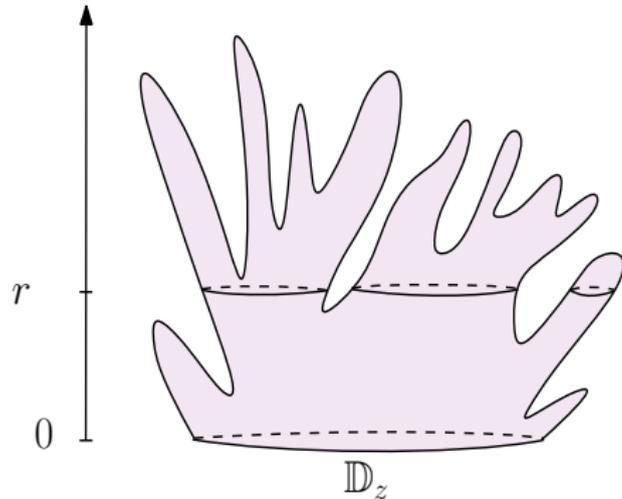
Une propriété de Markov spatiale

distances au bord



Une propriété de Markov spatiale

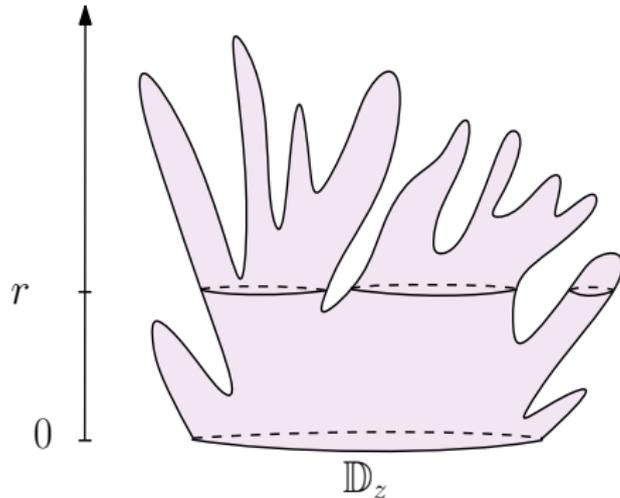
distances au bord



$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

Une propriété de Markov spatiale

distances au bord

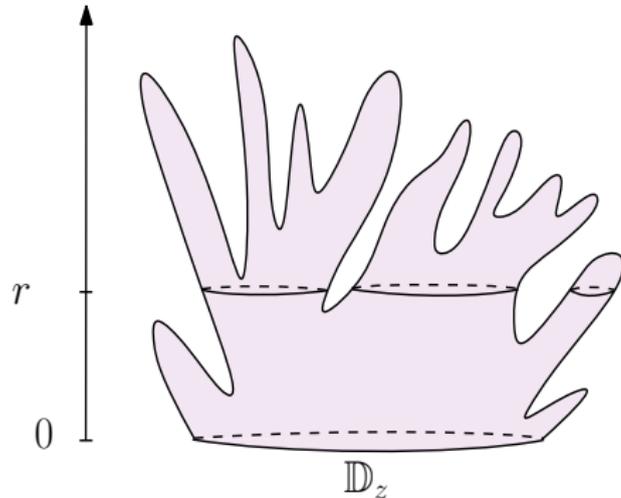


$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

Une propriété de Markov spatiale

distances au bord

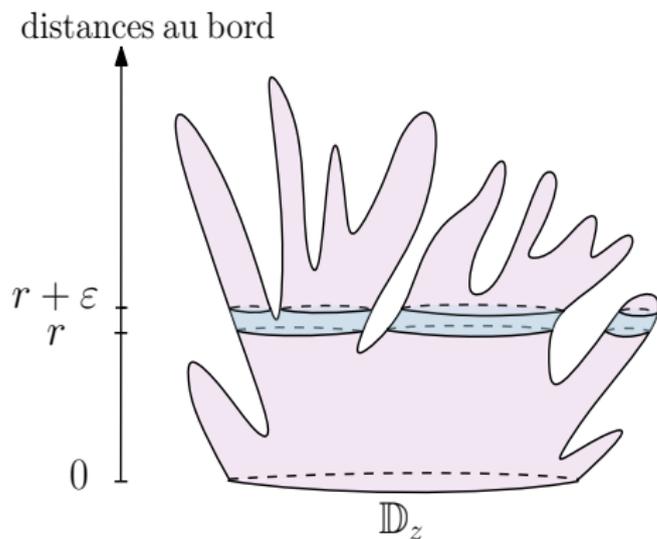


$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

\mathcal{L}_r^i longueur du bord $\partial \mathcal{C}_r^i$

Une propriété de Markov spatiale

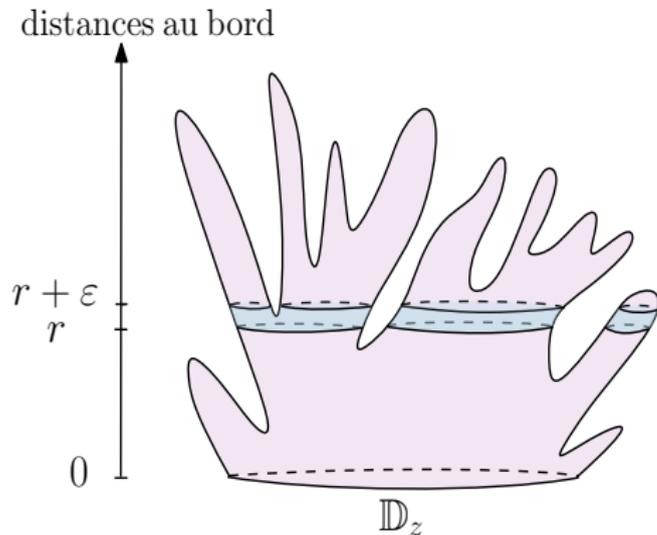


$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

\mathcal{L}_r^i longueur du bord $\partial \mathcal{C}_r^i$

Une propriété de Markov spatiale



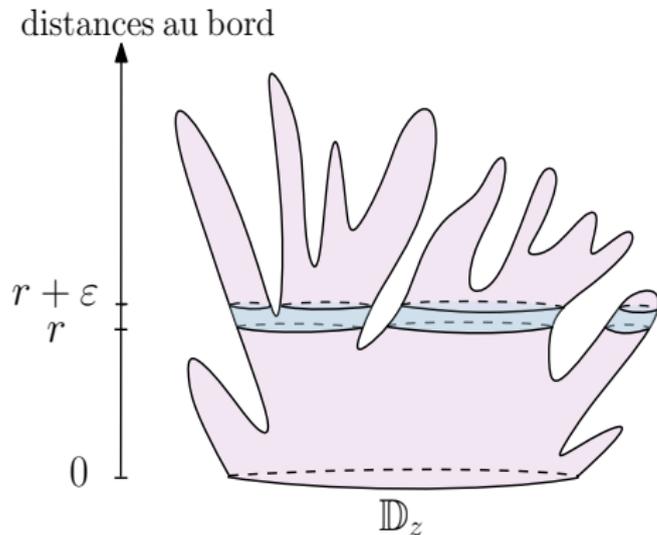
$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

\mathcal{L}_r^i longueur du bord $\partial \mathcal{C}_r^i$

$\mathfrak{L}(r) := (\mathcal{L}_r^i : i \geq 0)$

Une propriété de Markov spatiale



$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

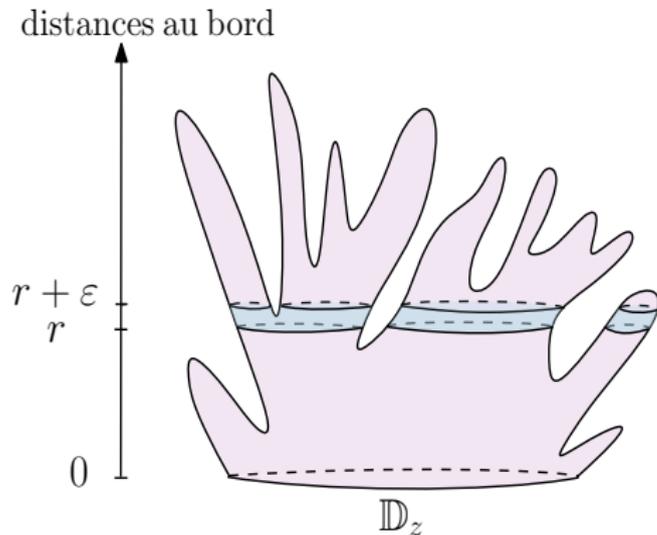
\mathcal{L}_r^i longueur du bord $\partial \mathcal{C}_r^i$

$\mathfrak{L}(r) := (\mathcal{L}_r^i : i \geq 0)$

Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

(i) Conditionnellement à $\mathfrak{L}(r)$, les comp. connexes \mathcal{C}_r^i sont des disques browniens indépendants, avec le périmètre associé.

Une propriété de Markov spatiale



$B_r(\mathbb{D}_z)$ boule de rayon r

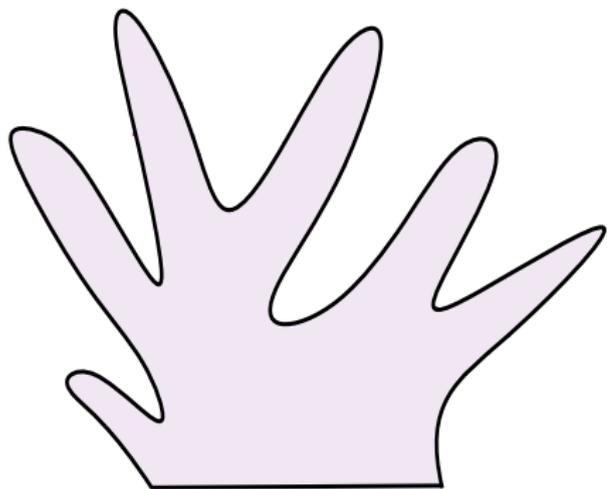
$(\mathcal{C}_r^i : i \geq 0)$ comp. connexes de
 $\mathbb{D}_z \setminus B_r(\mathbb{D}_z)$

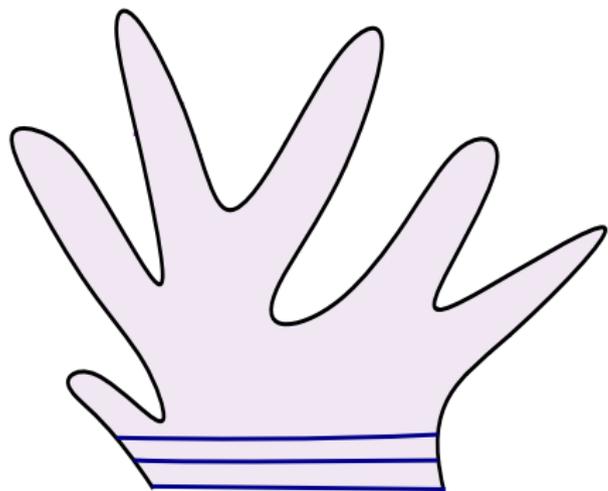
\mathcal{L}_r^i longueur du bord $\partial \mathcal{C}_r^i$

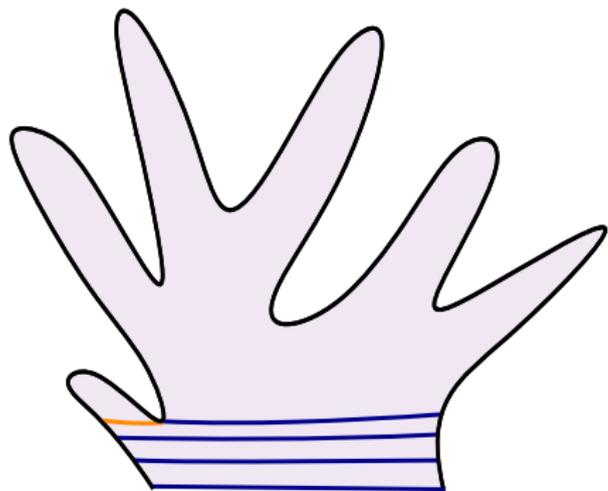
$\mathfrak{L}(r) := (\mathcal{L}_r^i : i \geq 0)$

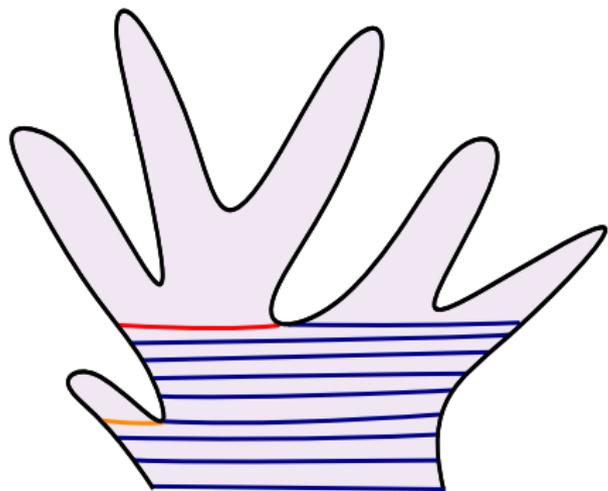
Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

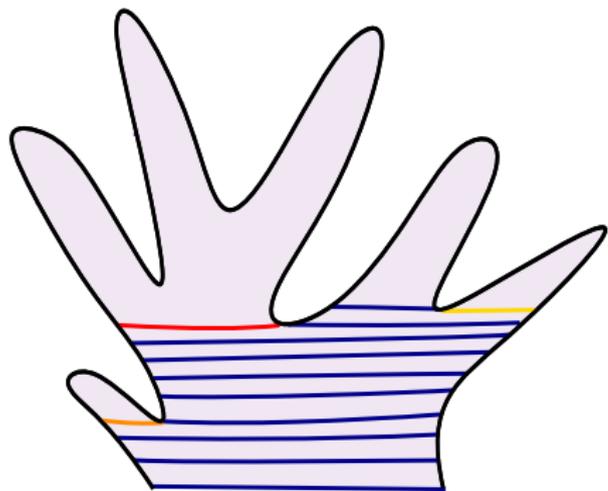
- (i) Conditionnellement à $\mathfrak{L}(r)$, les comp. connexes \mathcal{C}_r^i sont des disques browniens indépendants, avec le périmètre associé.
- (ii) $(\mathfrak{L}(r) : r \geq 0)$ est un processus de croissance-fragmentation explicite.

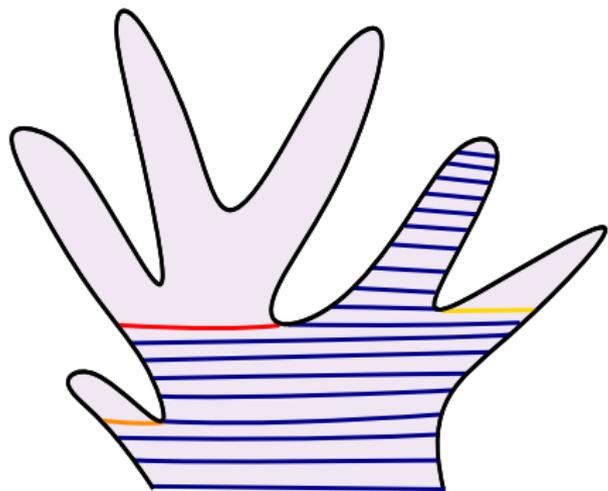


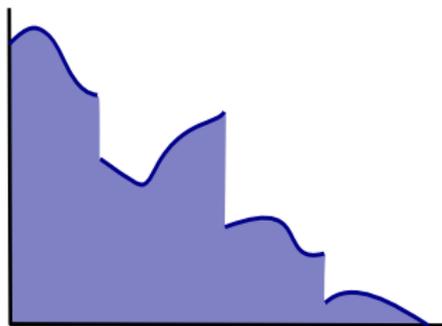
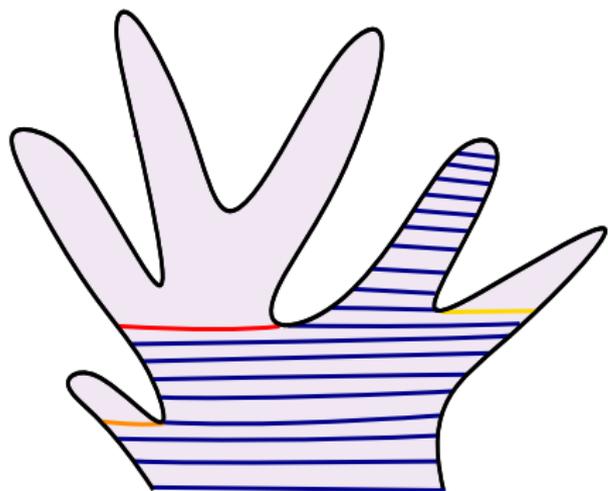


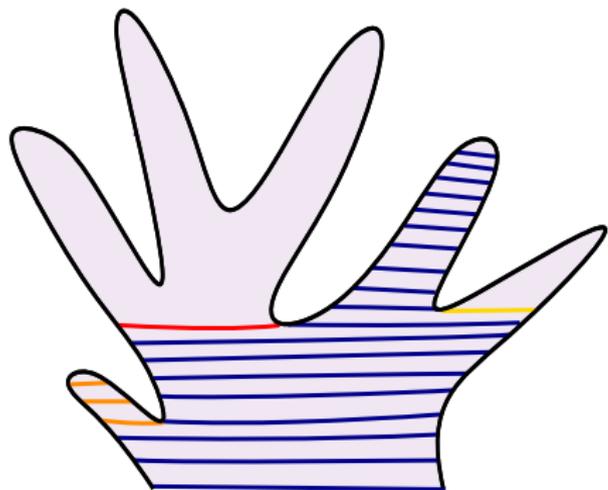


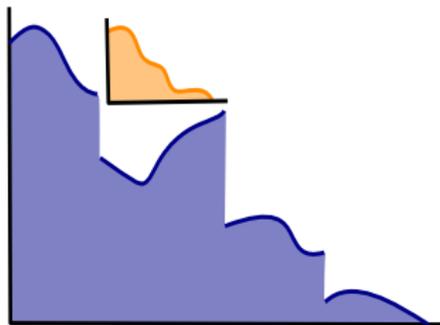
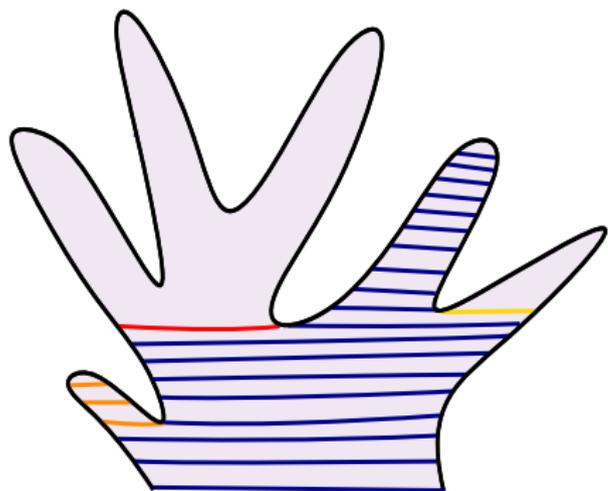




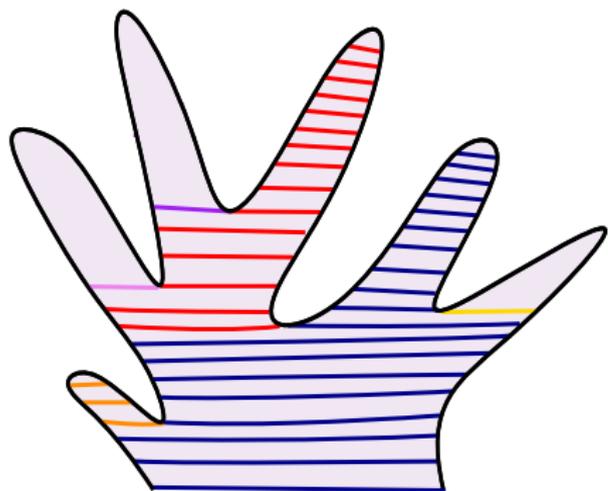


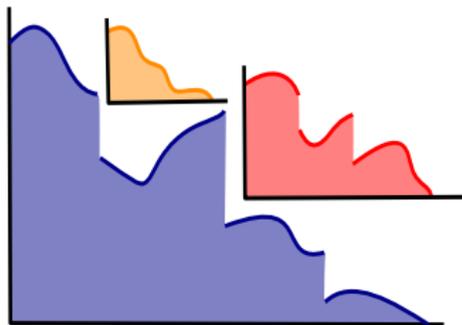
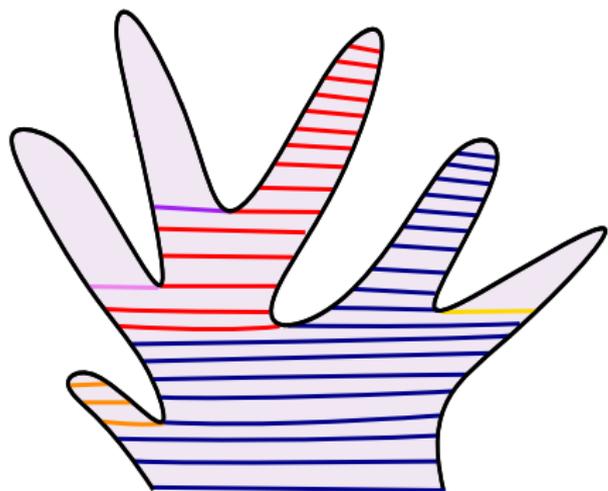


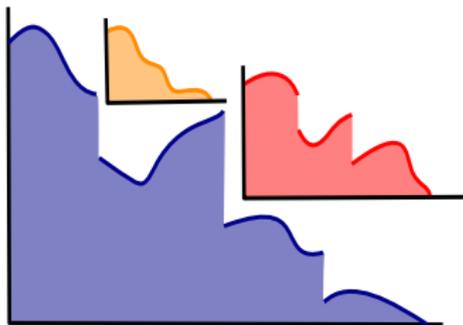
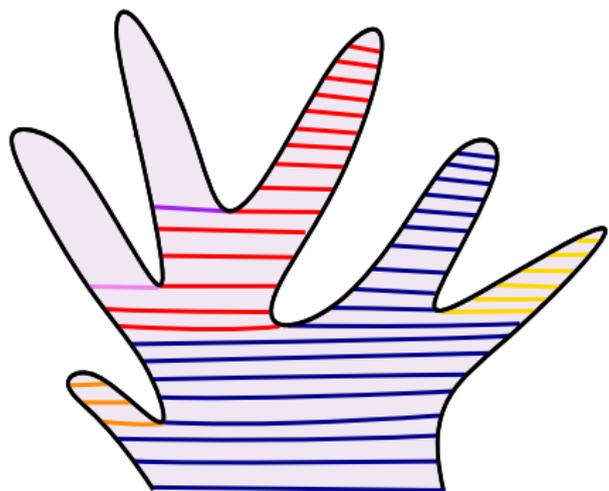


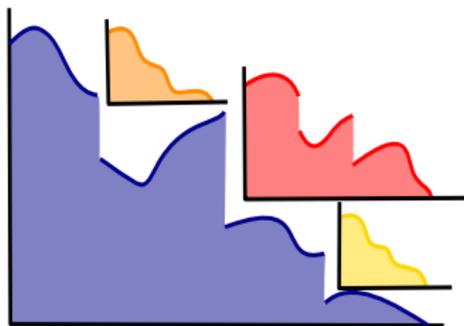
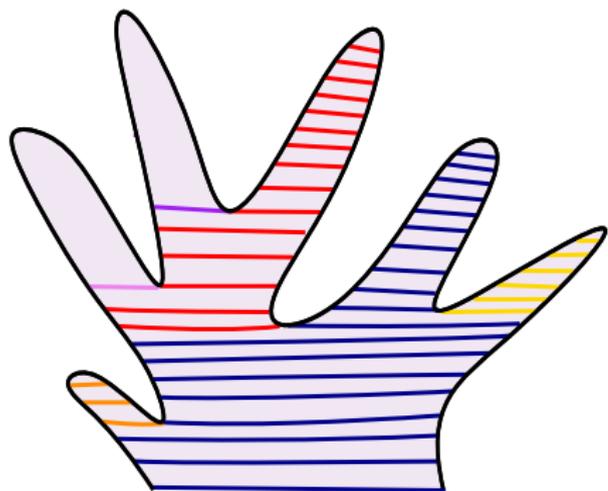


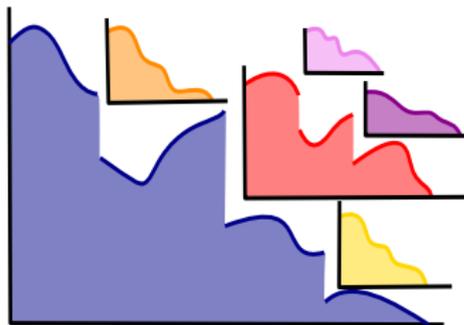
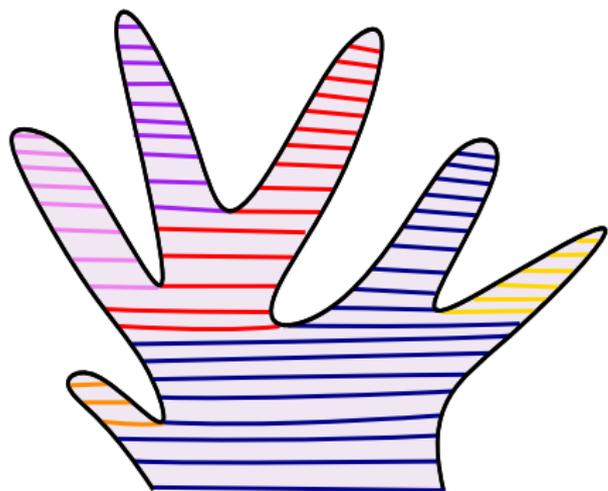
Généalogie des bords

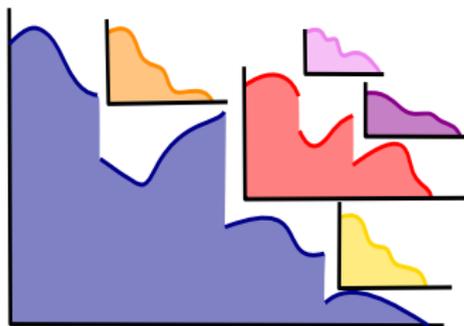
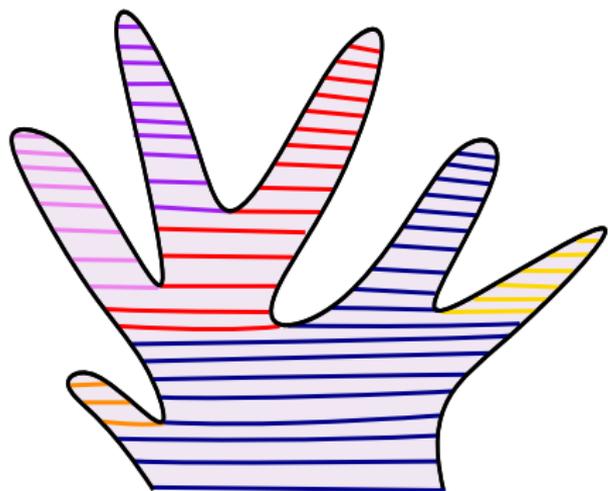




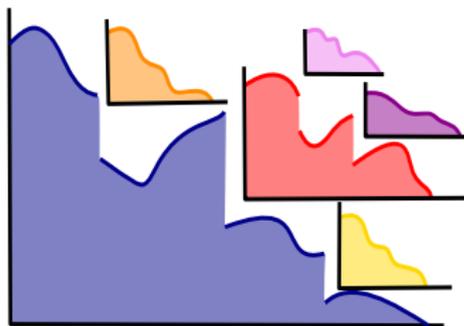
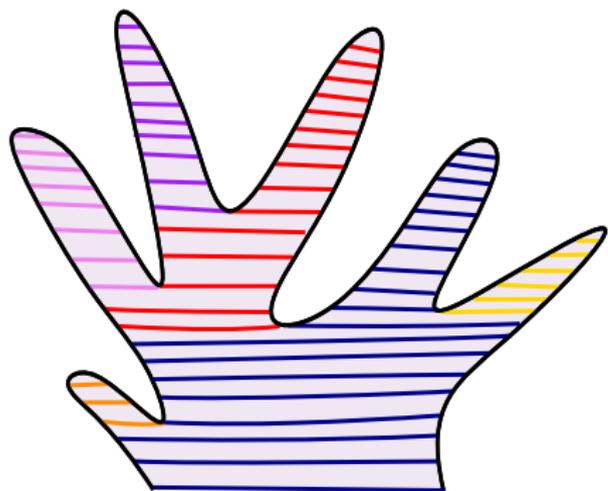




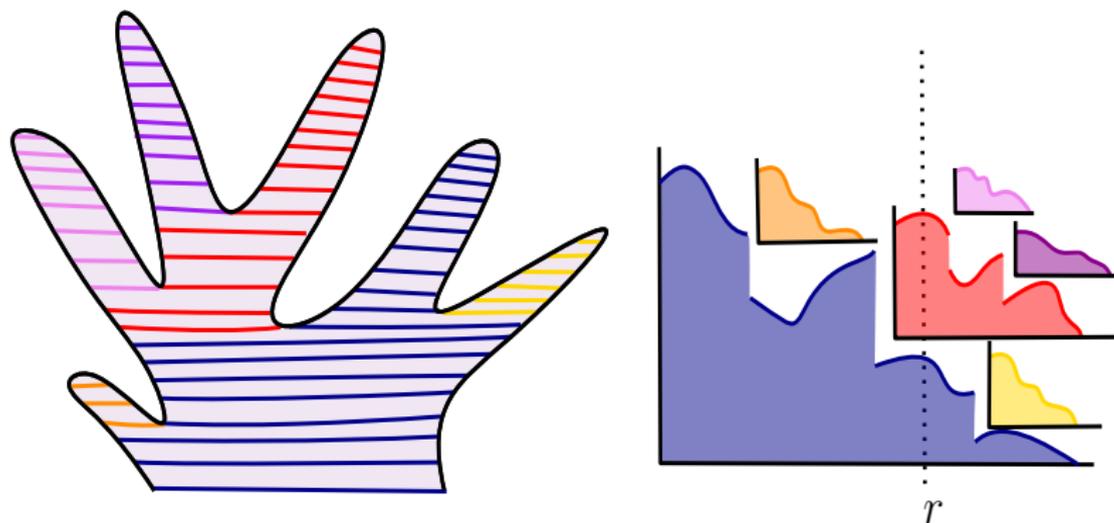




- La **masse** de la particule bleu suit un processus de Markov autosimilaire ;



- La **masse** de la particule bleu suit un processus de Markov autosimilaire ;
- Chaque saut Δ produit une **nouvelle** particule de masse $-\Delta$ qui évolue **indépendamment** et avec même dynamique ;



- La **masse** de la particule bleu suit un processus de Markov autosimilaire ;
- Chaque saut Δ produit une **nouvelle** particule de masse $-\Delta$ qui évolue **indépendamment** et avec même dynamique ;

$\mathfrak{L}(r) =$ collection des masses à l'instant r par ordre décroissant.

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation**

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation** et ils sont induits par des processus de Markov **autosimilaires**.

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation** et ils sont induits par des processus de Markov **autosimilaires**.

Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

Le processus $(\mathfrak{L}(r))_{r \geq 0}$ est un processus de croissance-fragmentation associé avec le processus de Markov autosimilaire :

$$(X_r)_{r \geq 0} = (z \exp(\xi_\gamma(rz^{-1/2})))_{r \geq 0},$$

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation** et ils sont induits par des processus de Markov **autosimilaires**.

Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

Le processus $(\mathfrak{L}(r))_{r \geq 0}$ est un processus de croissance-fragmentation associé avec le processus de Markov autosimilaire :

$$(X_r)_{r \geq 0} = (z \exp(\xi_{\gamma(rz^{-1/2})}))_{r \geq 0},$$

où $\gamma(r) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \exp(\frac{1}{2}\xi_s) ds \geq r\}$ et ξ est un processus de Lévy, commençant en 0, d'exposant de Laplace :

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation** et ils sont induits par des processus de Markov **autosimilaires**.

Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

Le processus $(\mathfrak{L}(r))_{r \geq 0}$ est un processus de croissance-fragmentation associé avec le processus de Markov autosimilaire :

$$(X_r)_{r \geq 0} = (z \exp(\xi_{\gamma(rz^{-1/2})}))_{r \geq 0},$$

où $\gamma(r) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \exp(\frac{1}{2}\xi_s) ds \geq r\}$ et ξ est un processus de Lévy, commençant en 0, d'exposant de Laplace :

$$\psi(\lambda) := \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(-\frac{8}{3} \lambda + \int_{-\log 2}^0 (e^{\lambda y} - 1 - \lambda(e^y - 1)) e^{-3y/2} (1 - e^y)^{-5/2} dy \right).$$

Élagage du disque brownien

Ce type de processus est appelé processus de **croissance-fragmentation** et ils sont induits par des processus de Markov **autosimilaires**.

Théorème (Le Gall-R. : AOP 2020)

Le processus $(\mathfrak{L}(r))_{r \geq 0}$ est un processus de croissance-fragmentation associé avec le processus de Markov autosimilaire :

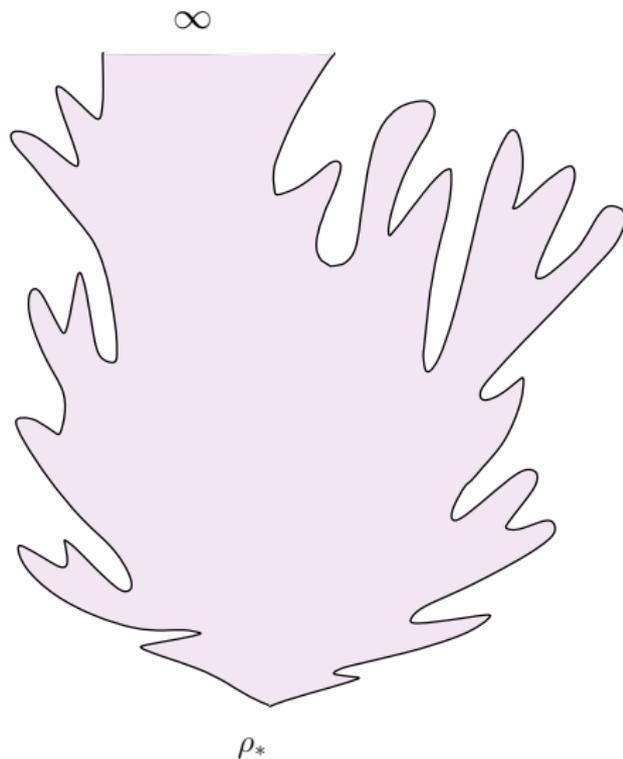
$$(X_r)_{r \geq 0} = (z \exp(\xi_{\gamma(rz^{-1/2})}))_{r \geq 0},$$

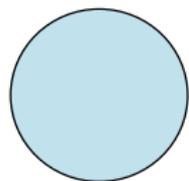
où $\gamma(r) := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \exp(\frac{1}{2}\xi_s) ds \geq r\}$ et ξ est un processus de Lévy, commençant en 0, d'exposant de Laplace :

$$\psi(\lambda) := \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(-\frac{8}{3} \lambda + \int_{-\log 2}^0 (e^{\lambda y} - 1 - \lambda(e^y - 1)) e^{-3y/2} (1 - e^y)^{-5/2} dy \right).$$

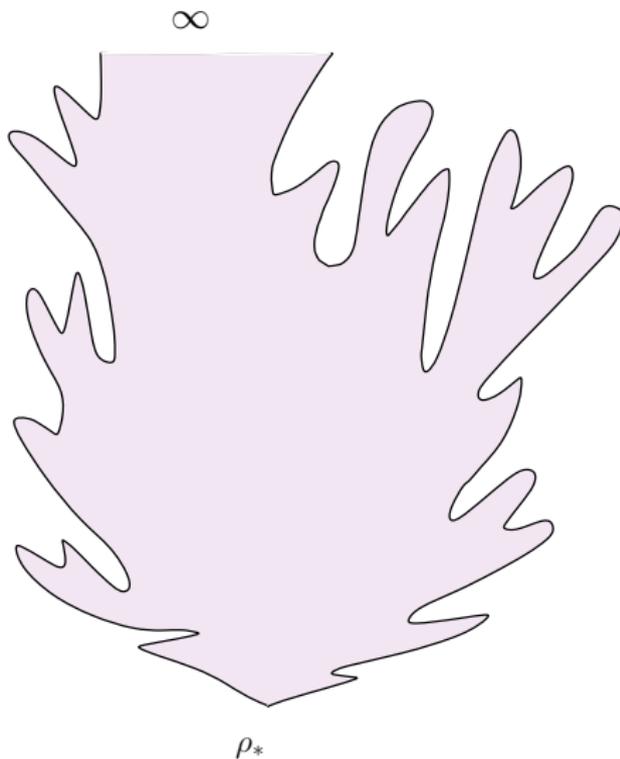
Analogie discret : Bertoin-Curien-Kortchemski (2018).

III. Profil isopérimétrique

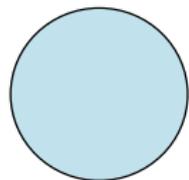




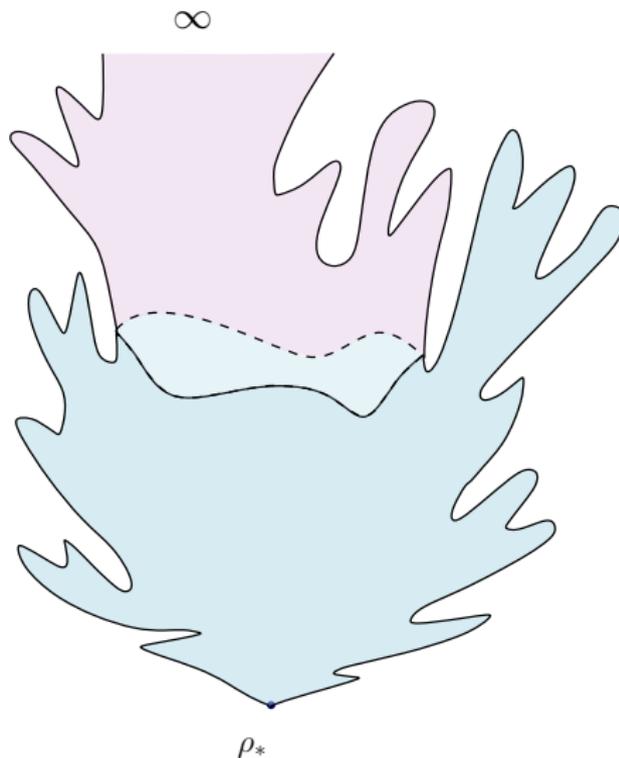
→
homéo



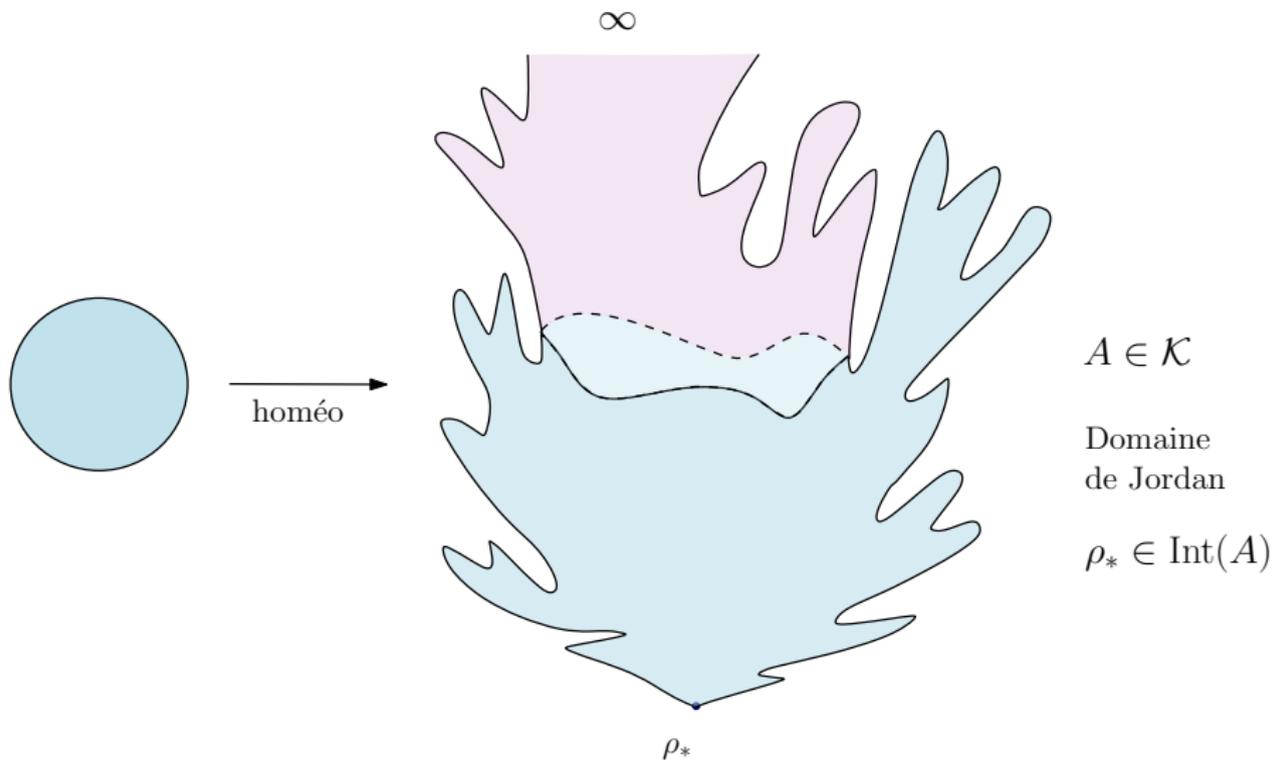
Domaine de Jordan



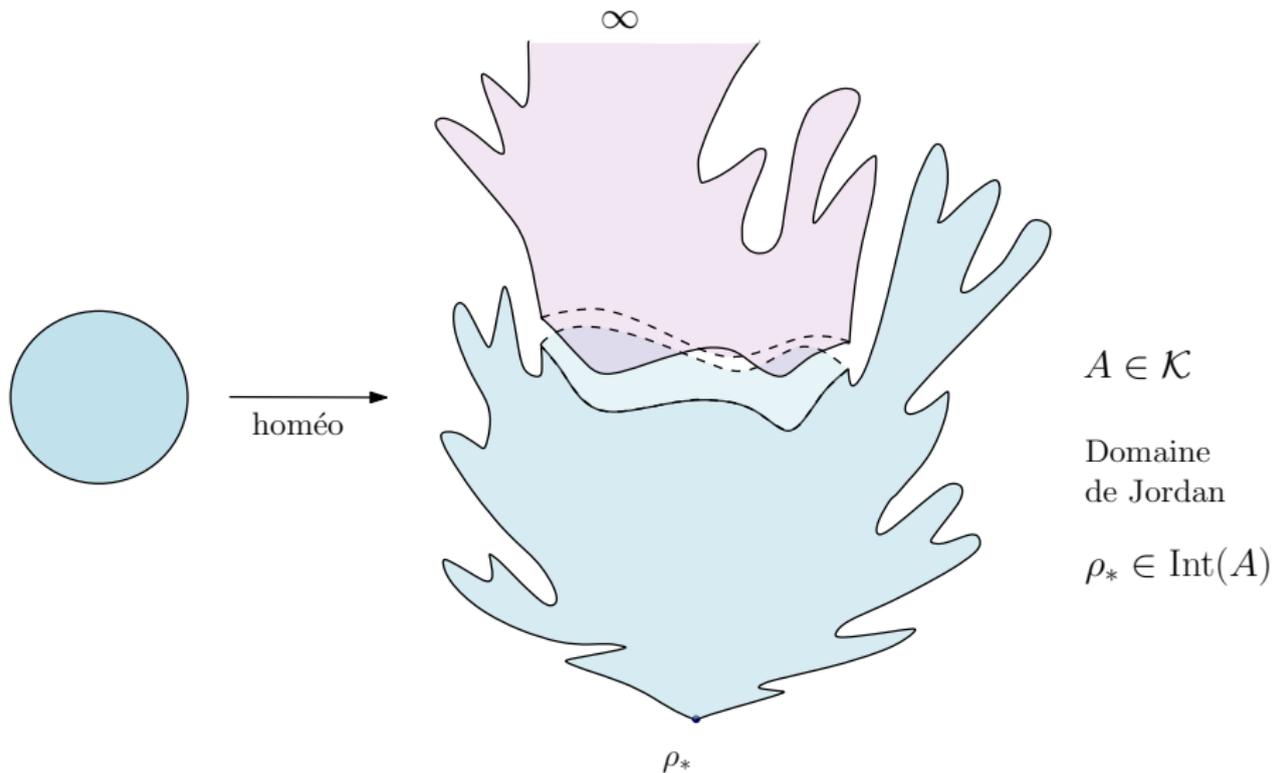
→
homéo



Domaine de Jordan



Domaine de Jordan



Profil isopérimétrique

Théorème (R. : AOP 2022)

Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$:

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta(\partial A)}{V(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V(A))|) > 0, \mathbb{P}\text{-p.s.}, \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty.$$

Théorème (R. : AOP 2022)

Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$:

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta(\partial A)}{V(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V(A))|) > 0, \mathbb{P}\text{-p.s.}, \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty.$$

- Propriété de Markov spatiale (Forte);

Théorème (R. : AOP 2022)

Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$:

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta(\partial A)}{V(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V(A))|) > 0, \mathbb{P}\text{-p.s.}, \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty.$$

- Propriété de Markov spatiale (Forte) ;
- Découpage en zones simplement connexes faiblement corrélées ;

Théorème (R. : AOP 2022)

Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$:

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta(\partial A)}{V(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V(A))|) > 0, \mathbb{P}\text{-p.s.}, \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty.$$

- Propriété de Markov spatiale (Forte) ;
- Découpage en zones simplement connexes faiblement corrélées ;
- Compréhension des géodésiques vers le bord des surfaces browniennes et calculs explicites.

Théorème (R. : AOP 2022)

Pour toute fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty)$:

$$\inf_{A \in \mathcal{K}} \frac{\Delta(\partial A)}{V(A)^{\frac{1}{4}}} f(|\log(V(A))|) > 0, \mathbb{P}\text{-p.s.}, \iff \sum_{m \in \mathbb{N}} f(m)^{-2} < \infty.$$

- Propriété de Markov spatiale (Forte) ;
- Découpage en zones simplement connexes faiblement corrélées ;
- Compréhension des géodésiques vers le bord des surfaces browniennes et calculs explicites.

Construction unifiée des modèles non-compacts (avec Le Gall: PTRF).



Merci pour votre écoute