Conjecture de la variance dans les boules de Schatten

Benjamin Dadoun

avec Matthieu Fradelizi, Olivier Guédon, et Pierre-André Zitt

New York University Abu Dhabi

Journées MAS 2022, Rouen

Plan de l'exposé

Introduction et résultats

Résumé de la preuve

β-ENSEMBLES

GUE : $\{x_1, \ldots, x_n\}$ valeurs propres de $\frac{X+X^*}{\sqrt{n}}$ où $X_{i,j}$ i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

β-ENSEMBLES

GUE : $\{x_1, \ldots, x_n\}$ valeurs propres de $\frac{X+X^*}{\sqrt{n}}$ où $X_{i,j}$ i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

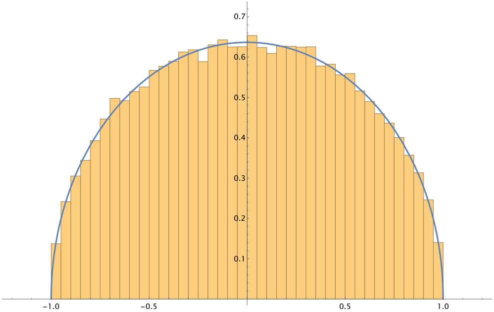
$$\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) := \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-n \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

β-ENSEMBLES

GUE : $\{x_1, \ldots, x_n\}$ valeurs propres de $\frac{X+X^*}{\sqrt{n}}$ où $X_{i,j}$ i.i.d. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.

$$\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \coloneqq \frac{1}{Z_n} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-n \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Allure de la mesure empirique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ (loi du demi-cercle de Wigner) :



β-ENSEMBLES

Plus généralement, n charges répulsives sous un potentiel extérieur V :

$$\mathbb{P}_{n,V}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) := \frac{1}{Z_{n,V}} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \exp\left(-\beta n \sum_{i=1}^n V(x_i)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

avec $\beta > 0$ (température^{-1}).

β-ENSEMBLES

Plus généralement, n charges répulsives sous un potentiel extérieur V :

$$\mathbb{P}_{n,V}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) := \frac{1}{Z_{n,V}} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \exp\left(-\beta n \sum_{i=1}^{n} V(x_i)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

avec $\beta > 0$ (température^{-1}).

Alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \approx \mu_V$ déterministe (mesure d'équilibre).

β-ENSEMBLES

Plus généralement, n charges répulsives sous un potentiel extérieur V :

$$\mathbb{P}_{n,V}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) := \frac{1}{Z_{n,V}} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta \exp\left(-\beta n \sum_{i=1}^n V(x_i)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

avec $\beta > 0$ (température^{-1}).

Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \approx \mu_V$ déterministe (mesure d'équilibre). De plus (TCL)

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) - n \int f \,\mathrm{d}\mu_V \approx \mathcal{N}(\mu_f, \sigma_f^2).$$

(V doit être assez régulier. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19].)

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

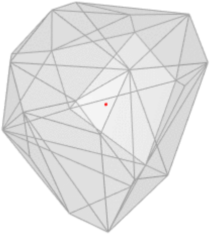
Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \leq \psi_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathrm{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$

Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.



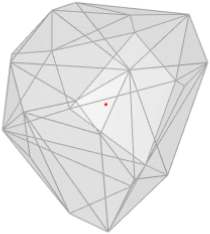
Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \leq \psi_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.



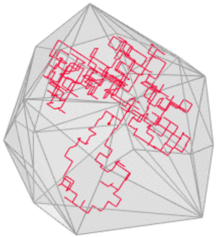
Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K \, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K, \; \forall f, \quad \mathrm{Var}_K \, f \leq \psi_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathbb{E}_K \, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.



Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

  $$\forall K,\ \forall f, \quad \operatorname{Var}_K f \leq \psi_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathbb{E}_K \, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que

  $$\forall K, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq \sigma_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathcal{U}\textit{niforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \leq \psi_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K, \quad \mathrm{Var}_K\, |\boldsymbol{x}|^2 \leq \sigma_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K\,.$$

  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $\sigma_d \leq \psi_d \leq \sqrt{d}$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \operatorname{Var}_K f \leq \psi_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathbb{E}_K \, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq \sigma_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $\sigma_d \leq \psi_d \leq \sqrt{d}$.

- Eldan '13 :
  $\psi_d \leq C \sigma_d \log d$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \le \psi_d \,\|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K, \quad \mathrm{Var}_K\, |\boldsymbol{x}|^2 \le \sigma_d \,\|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K.$$

  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $\sigma_d \le \psi_d \le \sqrt{d}$.
- Eldan '13 :
  $\psi_d \le C\sigma_d \log d$.
- Chen '21 :
  $\psi_d = d^{O\left(\sqrt{\frac{\log d}{\log\log d}}\right)}$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K,\ \forall f, \quad \operatorname{Var}_K f \leq \psi_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathbb{E}_K \, |\nabla f|^2.$$

  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que

$$\forall K, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq \sigma_d \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $\sigma_d \leq \psi_d \leq \sqrt{d}$.
- Eldan '13 :
  $\psi_d \leq C \sigma_d \log d$.
- Chen '21 :
  $\psi_d = d^{O\left(\sqrt{\frac{\log d}{\log \log d}}\right)}$.
- Klartag-Lehec '22 :
  $\sigma_d \leq C \log^4 d$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathit{Uniforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que
  $$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \le \psi_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$
  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.
- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que
  $$\forall K, \quad \mathrm{Var}_K\, |\boldsymbol{x}|^2 \le \sigma_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K.$$
  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $\sigma_d \le \psi_d \le \sqrt{d}$.
- Eldan '13 :
  $\psi_d \le C \sigma_d \log d$.
- Chen '21 :
  $\psi_d = d^{O\left(\sqrt{\frac{\log d}{\log \log d}}\right)}$.
- Klartag-Lehec '22 :
  $\sigma_d \le C \log^4 d$.

- Meilleure borne (Jambulapati-Lee-Vempala '22) : $\sigma_d \le C \log^{2.2226} d$.

Conjectures convexes en grande dimension

$K \subset \mathbb{R}^d$ corps convexe symétrique, $\mathbb{P}_K := \mathcal{U}\textit{niforme}(K)$, $\Sigma_K := \mathbb{E}_K\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$.

- Kannan-Lovász-Simonovits (1995)
  Soit ψ_d la plus petite constante telle que
  $$\forall K,\ \forall f, \quad \mathrm{Var}_K\, f \le \psi_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathbb{E}_K\, |\nabla f|^2.$$
  Conjecture KLS : $\sup_d \psi_d < \infty$.

- Bobkov-Koldobsky, Anttila-Ball-Perissinaki (2003)
  Soit σ_d la plus petite constante telle que
  $$\forall K, \quad \mathrm{Var}_K\, |\boldsymbol{x}|^2 \le \sigma_d\, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}}\, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K.$$
  Conjecture de la variance : $\sup_d \sigma_d < \infty$.

- KLS '95 :
  $$\sigma_d \le \psi_d \le \sqrt{d}.$$
- Eldan '13 :
  $$\psi_d \le C\sigma_d \log d.$$
- Chen '21 :
  $$\psi_d = d^{O\left(\sqrt{\frac{\log d}{\log\log d}}\right)}.$$
- Klartag-Lehec '22 :
  $$\sigma_d \le C \log^4 d.$$

- Meilleure borne (Jambulapati-Lee-Vempala '22) : $\sigma_d \le C \log^{2.2226} d$.

On n'a trouvé aucune famille $(K(d))_d$ qui contredise ces conjectures. . .

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K \, .$$

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2$$

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}$$

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}| &\leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2} \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}\end{aligned}$$

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}$$

$$\leq \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \leq C.$$

ce qui est mieux que $\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2 = \operatorname{Tr} \Sigma_K = d$.

Conjecture de la variance (restreinte)

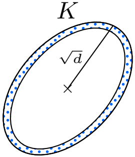
Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \le C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \le \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}$$

$$\le \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \le C.$$



ce qui est mieux que $\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \le \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2 = \operatorname{Tr} \Sigma_K = d$.

Conjecture de la variance (restreinte)

Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

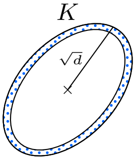
$$\forall d, \quad \operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}$$

$$\leq \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2} \leq C.$$

ce qui est mieux que $\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2 = \operatorname{Tr} \Sigma_K = d$.



Exemple. $K(d) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1 \right\}$ $(p \in [1, \infty])$.
[Sodin '08 ; Latała-Oleszkiewicz '08]

Conjecture de la variance (restreinte)

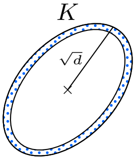
Une famille de corps convexes $K = K(d)$ vérifie la conjecture de la variance s'il existe une constante C indépendante de la dimension d telle que

$$\forall d, \quad \mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}|^2 \leq C \, \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \, \mathrm{Tr}\, \Sigma_K .$$

Pour $\Sigma_K = \mathrm{I}_d$, cela entraîne

$$\mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \left(|\boldsymbol{x}| - \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2} \right)^2 \cdot \frac{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}{\left(|\boldsymbol{x}| + \sqrt{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}\right)^2}$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}|^2}{\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2} \leq C.$$



ce qui est mieux que $\mathrm{Var}_K \, |\boldsymbol{x}| \leq \mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^2 = \mathrm{Tr}\, \Sigma_K = d$.

Exemple. [Sodin '08 ; Latała-Oleszkiewicz '08]

$$K(d) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1 \right\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Représentation de Schechtman-Zinn ($p < \infty$). Soit $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ de loi normale généralisée de densité $\propto \mathrm{e}^{-\|x\|_p^p / p}$, et $B \sim \mathrm{Beta}(d, 1)$ indépendante. Alors

$$B \cdot \frac{\boldsymbol{X}}{\|\boldsymbol{X}\|_p} \sim \mathbb{P}_{K(d)} .$$

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Théorème (DFGZ). Si $p \in (3, \infty)$, alors

$$d_n \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\big(\operatorname{Tr} \Sigma_K\big)^2} = d_n \left(\frac{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^4}{\big(\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2\big)^2} - 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(p-2)^2}{2p^2}$$

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Théorème (DFGZ). Si $p \in (3, \infty)$, alors

$$d_n \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\big(\operatorname{Tr} \Sigma_K\big)^2} = d_n \left(\frac{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^4}{\big(\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2\big)^2} - 1 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{(p-2)^2}{2p^2} < \frac{1}{2}.$$

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Théorème (DFGZ). Si $p \in (3, \infty)$, alors

$$d_n \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\big(\operatorname{Tr} \Sigma_K\big)^2} = d_n \left(\frac{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^4}{\big(\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2\big)^2} - 1 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{(p-2)^2}{2p^2} < \frac{1}{2}.$$

Donc pour n grand, $\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\big(\operatorname{Tr} \Sigma_K\big)^2}{d_n} \leq \frac{1}{2} \|\Sigma_K\|_{\mathsf{op}} \operatorname{Tr} \Sigma_K$.

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Théorème (DFGZ). Si $p \in (3, \infty)$, alors

$$d_n \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\big(\operatorname{Tr} \Sigma_K\big)^2} = d_n \left(\frac{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^4}{\big(\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2\big)^2} - 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(p-2)^2}{2p^2} < \frac{1}{2}.$$

- Le cas $p = 2$ est trivial : $B_E\big(S_2^n\big)$ est une boule euclidienne.

Notations et résultat principal

- $\mathbb{F} := \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$ (quaternions).
- $E := \{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) : T^* = T\}$ matrices **auto-adjointes** sur $\mathbb{F}$.
- $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ valeurs propres de T.
- $E \simeq \mathbb{R}^{d_n}$ avec $d_n := \dim_{\mathbb{R}} E$ et norme euclidienne $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\operatorname{Tr} T^2}$.

Boule de Schatten. Boule unité pour la p-norme de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K := B_E\big(S_p^n\big) := \Big\{T \in E : \|\boldsymbol{\lambda}(T)\|_p \leq 1\Big\} \qquad (p \in [1, \infty]).$$

Théorème (DFGZ). Si $p \in (3, \infty)$, alors

$$d_n \frac{\operatorname{Var}_K |\boldsymbol{x}|^2}{\left(\operatorname{Tr} \Sigma_K\right)^2} = d_n \left(\frac{\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^2\right)^2} - 1 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{(p-2)^2}{2p^2} < \frac{1}{2}.$$

- Le cas $p = 2$ est trivial : $B_E\big(S_2^n\big)$ est une boule euclidienne.
- Le cas $p = \infty$ a été prouvé par Radke et Vritsiou (2020).

Plan de l'exposé

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K \left|\boldsymbol{x}\right|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} \left|\boldsymbol{\lambda}(T)\right|^q \mathrm{d}T$$

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K \left|\boldsymbol{x}\right|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} \left|\boldsymbol{\lambda}(T)\right|^q \mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=}$$

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \leq 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \leq 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1\leq i<j\leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times\,\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}}\,\boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \, \mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \leq 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times\, \Gamma\big(1 + \frac{d_n+q}{p}\big)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}} \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K \, |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \, t^{\frac{d_n+q}{p}} \mathrm{d}t \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \leq 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \le 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \le i < j \le n} \left|\lambda_i - \lambda_j\right|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times \, \Gamma\left(1 + \frac{d_n + q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}} \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \, \cancel{t^{\frac{d_n+q}{p}}} \,\mathrm{d}t \int_{t \ge \|\boldsymbol{x}\|_p^p} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \, \mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \leq 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times \, \Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}} \, \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \le 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \le i < j \le n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times\, \Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}} \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- Saint-Raymond '84 : formules et bornes pour $|B_E(S_p^n)|$.

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$
$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \le 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \le i < j \le n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times\, \Gamma\big(1 + \frac{d_n+q}{p}\big)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}}\, \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- Saint-Raymond '84 : formules et bornes pour $|B_E(S_p^n)|$.
- König-Meyer-Pajor '98 : conjecture de l'hyperplan pour $B_E(S_p^n)$.

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q \,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p \le 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q \, f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1 \le i < j \le n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times \Gamma\left(1 + \frac{d_n + q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}} \boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1 + \frac{d_n + q}{p}\right) \cdot \mathbb{E}_K |\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|_p^p} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- Saint-Raymond '84 : formules et bornes pour $|B_E(S_p^n)|$.
- König-Meyer-Pajor '98 : conjecture de l'hyperplan pour $B_E(S_p^n)$.
- Kabluchko-Prochno-Thäle '20 : $|B_E(S_p^n)|^{1/d_n}$ & LfGN pour $\boldsymbol{\lambda}(T)$.

Changement de variable

$$\mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^q = \frac{1}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|}\int_{B_E\left(S_p^n\right)} |\boldsymbol{\lambda}(T)|^q\,\mathrm{d}T$$

$$\overset{T=U\Lambda U^*}{=} \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|}\int_{\|\boldsymbol{\lambda}\|_p\le 1} |\boldsymbol{\lambda}|^q\, f_\beta(\boldsymbol{\lambda})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$$

où c_n est explicite et dépend de $|U_n(\mathbb{F})|$, et

$$f_\beta(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{1\le i<j\le n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

avec $\beta := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$.

Astuce de convexité. $\times\,\Gamma\left(1+\frac{d_n+q}{p}\right)$, puis $\boldsymbol{\lambda} \leftarrow t^{-\frac{1}{p}}\,\boldsymbol{x}$, et enfin Fubini :

$$\Gamma\left(1+\frac{d_n+q}{p}\right)\cdot \mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^q = \frac{c_n}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|}\int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}|^q f_\beta(\boldsymbol{x})\,\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|_p^p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

On introduit

$$\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) := \frac{1}{Z_{n,p}}\, f_\beta(\boldsymbol{x})\;\mathrm{e}^{-\beta n \gamma_p \|\boldsymbol{x}\|_p^p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad \left(\gamma_p := \tfrac{1}{2} B\left(\tfrac{p}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Vers les statistiques linéaires de β-ensembles

- Ainsi,

$$\mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^q = \frac{Z_{n,p}\,c_n\big(\beta n\gamma_p\big)^{\frac{d_n+q}{p}}}{\big|B_E\big(S_p^n\big)\big|\,\Gamma\Big(1+\frac{d_n+q}{p}\Big)}\int_{\mathbb{R}^n}|\boldsymbol{x}|^q\,\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}). \qquad (L_q)$$

Vers les statistiques linéaires de β-ensembles

- Ainsi,

$$\mathbb{E}_K \left|\boldsymbol{x}\right|^q = \frac{Z_{n,p}\, c_n (\beta n \gamma_p)^{\frac{d_n+q}{p}}}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right| \Gamma\left(1 + \frac{d_n+q}{p}\right)} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\boldsymbol{x}\right|^q \mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}). \qquad (L_q)$$

- $\dfrac{(L_4)\cdot(L_0)}{(L_2)^2}$ donne

$$\frac{\mathbb{E}_K \left|\boldsymbol{x}\right|^4}{\left(\mathbb{E}_K \left|\boldsymbol{x}\right|^2\right)^2} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{d_n+2}{p}\right)^2}{\Gamma\left(1 + \frac{d_n+4}{p}\right)\Gamma\left(1 + \frac{d_n}{p}\right)} \cdot \frac{\mathbb{E}_{n,p} \left|\boldsymbol{x}\right|^4}{\left(\mathbb{E}_{n,p} \left|\boldsymbol{x}\right|^2\right)^2}.$$

Vers les statistiques linéaires de β-ensembles

- Ainsi,

$$\mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^q = \frac{Z_{n,p}\,c_n(\beta n\gamma_p)^{\frac{d_n+q}{p}}}{\left|B_E\left(S_p^n\right)\right|\Gamma\left(1+\frac{d_n+q}{p}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}|\boldsymbol{x}|^q\,\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}). \qquad (L_q)$$

- $\dfrac{(L_4)\cdot(L_0)}{(L_2)^2}$ donne

$$\frac{\mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_K\,|\boldsymbol{x}|^2\right)^2} = \underbrace{\frac{\Gamma\left(1+\frac{d_n+2}{p}\right)^2}{\Gamma\left(1+\frac{d_n+4}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{d_n}{p}\right)}}_{=1-\frac{8}{\beta p n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad\checkmark}\cdot\frac{\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^2\right)^2}.$$

- Il faut un développement jusqu'à $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de ce dernier quotient.

Premier ordre asymptotique

Soit $V_p(x) := 2\gamma_p|x|^p$ et $L_n(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$.

Premier ordre asymptotique

Soit $V_p(x) := 2\gamma_p |x|^p$ et $L_n(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$. On a

$$\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z_{n,p}} \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^{\beta} \,\mathrm{e}^{-\beta n \gamma_p \|\boldsymbol{x}\|_p^p} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{Z_{n,p}} \,\mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2} H_{n,p}(\boldsymbol{x})} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

avec $\quad H_{n,p}(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_p(x_i) - \dfrac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j|$

Premier ordre asymptotique

Soit $V_p(x) := 2\gamma_p |x|^p$ et $L_n(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$. On a

$$\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z_{n,p}} \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^\beta \, \mathrm{e}^{-\beta n \gamma_p \|\boldsymbol{x}\|_p^p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{Z_{n,p}} \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2} H_{n,p}(\boldsymbol{x})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

avec $\quad H_{n,p}(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_p(x_i) - \dfrac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j| = \mathcal{I}_p\big(L_n(\boldsymbol{x})\big),$

$$\mathcal{I}_p(\mu) := \int_{\mathbb{R}} V_p(x)\,\mu(\mathrm{d}x) - \iint_{\mathbb{R}^2_{\neq}} \log|x-y|\,\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y).$$

Premier ordre asymptotique

Soit $V_p(x) := 2\gamma_p|x|^p$ et $L_n(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$. On a

$$\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z_{n,p}} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^\beta \, \mathrm{e}^{-\beta n \gamma_p \|\boldsymbol{x}\|_p^p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{Z_{n,p}} \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2} \boxed{H_{n,p}(\boldsymbol{x})}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

minimal lorsque $L_n(\boldsymbol{x}) \in \operatorname*{argmin}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} \mathcal{I}_p$

avec $\quad H_{n,p}(\boldsymbol{x}) := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_p(x_i) - \dfrac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j| = \mathcal{I}_p\big(L_n(\boldsymbol{x})\big),$

$$\mathcal{I}_p(\mu) := \int_{\mathbb{R}} V_p(x)\,\mu(\mathrm{d}x) - \iint_{\mathbb{R}^2_{\neq}} \log|x-y|\,\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y).$$

Premier ordre asymptotique

Soit $V_p(x) := 2\gamma_p|x|^p$ et $L_n(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$. On a

$$\mathbb{P}_{n,p}(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z_{n,p}} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^\beta \, \mathrm{e}^{-\beta n\gamma_p \|\boldsymbol{x}\|_p^p} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{Z_{n,p}} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2} \boxed{H_{n,p}(\boldsymbol{x})}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

minimal lorsque $L_n(\boldsymbol{x}) \in \operatorname*{argmin}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} \mathcal{I}_p$

avec $$H_{n,p}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n V_p(x_i) - \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} \log|x_i - x_j| = \mathcal{I}_p\big(L_n(\boldsymbol{x})\big),$$

$$\mathcal{I}_p(\mu) := \int_{\mathbb{R}} V_p(x)\,\mu(\mathrm{d}x) - \iint_{\mathbb{R}^2_{\neq}} \log|x-y|\,\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y).$$

- $\operatorname*{argmin}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} \mathcal{I}_p = \{\mu_p\}$, $\mu_p \ll \mathrm{Leb}$ et $\mathrm{Supp}\,\mu_p = [-1,1]$;
- $\mathbb{E}_{n,p}\langle L_n(\boldsymbol{x}), f\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \mu_p, f\rangle$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b$;
- $-\frac{1}{d_n}\log Z_{n,p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{I}_p(\mu_p) = \log 2 + \frac{3}{2p}$.

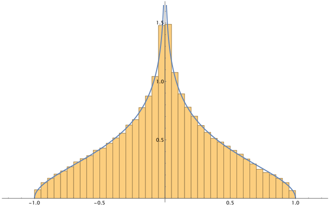
[Saff-Totik '97, Ben Arous-Guionnet '97, Johansson '98, Hiai-Petz '00]

Premier ordre asymptotique

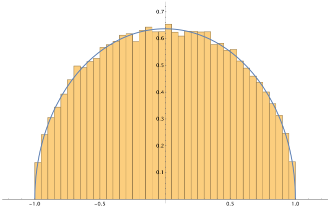
Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.

Premier ordre asymptotique

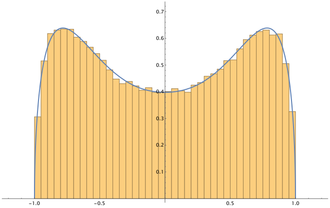
Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.



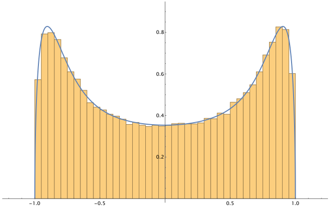
(A) $p = 1$;



(B) $p = 2$;



(C) $p = 5$;



(D) $p = 10$.

Premier ordre asymptotique

Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.

Lemme. Il existe $B, c, C > 0$ tels que, pour $U \coloneqq (-B, B)$,

$$\mathbb{P}\Big(L_{n,p}(U^c) > 0\Big) \leq Cn\,\mathrm{e}^{-cnB^p}, \quad n \geq 1.$$

Premier ordre asymptotique

Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.

Lemme. Il existe $B, c, C > 0$ tels que, pour $U \coloneqq (-B, B)$,

$$\mathbb{P}\Big(L_{n,p}(U^c) > 0\Big) \leq Cn\,\mathrm{e}^{-cnB^p}, \quad n \geq 1.$$

Corollaire. Pour toutes f, g continues polynomialement bornées,

$$\mathbb{E}\,g\Big(\langle L_{n,p}, f\rangle\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} g\Big(\langle \mu_p, f\rangle\Big).$$

Premier ordre asymptotique

Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.

Lemme. Il existe $B, c, C > 0$ tels que, pour $U \coloneqq (-B, B)$,

$$\mathbb{P}\Big(L_{n,p}(U^c) > 0\Big) \le Cn\,\mathrm{e}^{-cnB^p}, \quad n \ge 1.$$

Corollaire. Pour toutes f, g continues polynomialement bornées,

$$\mathbb{E}\, g\Big(\langle L_{n,p}, f\rangle\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} g\Big(\langle \mu_p, f\rangle\Big).$$

- En particulier, pour $f(x) \coloneqq x^2$,

$$\frac{\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^2\right)^2} = \frac{\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^2}{\left(\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle\right)^2} = 1 + o(1).$$

Premier ordre asymptotique

Soit $L_{n,p}$ la mesure aléatoire ayant la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ sous $\mathbb{P}_{n,p}$.

Lemme. Il existe $B, c, C > 0$ tels que, pour $U := (-B, B)$,

$$\mathbb{P}\Big(L_{n,p}(U^c) > 0\Big) \le Cn\,\mathrm{e}^{-cnB^p}, \quad n \ge 1.$$

Corollaire. Pour toutes f, g continues polynomialement bornées,

$$\mathbb{E}\,g\Big(\langle L_{n,p}, f\rangle\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} g\Big(\langle \mu_p, f\rangle\Big).$$

- En particulier, pour $f(x) := x^2$,

$$\frac{\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^2\right)^2} = \frac{\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^2}{\left(\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle\right)^2} = 1 + o(1).$$

- On a besoin de $\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^q$ à l'ordre $o\big(\frac{1}{n^2}\big)$, où $q \in \{1, 2\}$.

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle \to \langle \mu_p, x^2 \rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2 \rangle - \langle \mu_p, x^2 \rangle\Big)\,?$$

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle \to \langle \mu_p, x^2 \rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2 \rangle - \langle \mu_p, x^2 \rangle\Big)\,?$$

Lemme. Si $p \in (3, \infty)$, alors $F_{n,p}$ converge en loi et en moments vers une variable $\mathcal{N}(m_p, \frac{1}{4\beta})$ lorsque $n \to \infty$.

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle \to \langle \mu_p, x^2 \rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2 \rangle - \langle \mu_p, x^2 \rangle\Big)\,?$$

Lemme. Si $p \in (3, \infty)$, alors $F_{n,p}$ converge en loi et en moments vers une variable $\mathcal{N}(m_p, \frac{1}{4\beta})$ lorsque $n \to \infty$.

Fin de la preuve. On écrit $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle = \langle \mu_p, x^2 \rangle + \frac{1}{n} F_{n,p}$.

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2\rangle \to \langle \mu_p, x^2\rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\Big)\,?$$

Lemme. Si $p \in (3, \infty)$, alors $F_{n,p}$ converge en loi et en moments vers une variable $\mathcal{N}(m_p, \frac{1}{4\beta})$ lorsque $n \to \infty$.

Fin de la preuve. On écrit $\langle L_{n,p}, x^2\rangle = \langle \mu_p, x^2\rangle + \frac{1}{n} F_{n,p}$. Alors

$$\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^q = \langle \mu_p, x^2\rangle^q \left(1 + \frac{q\ \mathbb{E}\,F_{n,p}}{n\langle \mu_p, x^2\rangle} + \frac{q(q-1)\,\mathbb{E}\,F_{n,p}^2}{2n^2\langle \mu_p, x^2\rangle^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2\rangle \to \langle \mu_p, x^2\rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\Big)\text{ ?}$$

Lemme. Si $p \in (3, \infty)$, alors $F_{n,p}$ converge en loi et en moments vers une variable $\mathcal{N}(m_p, \frac{1}{4\beta})$ lorsque $n \to \infty$.

Fin de la preuve. On écrit $\langle L_{n,p}, x^2\rangle = \langle \mu_p, x^2\rangle + \frac{1}{n} F_{n,p}$. Alors

$$\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^q = \langle \mu_p, x^2\rangle^q \left(1 + \frac{q\ \mathbb{E}\,F_{n,p}}{n\langle \mu_p, x^2\rangle} + \frac{q(q-1)\,\mathbb{E}\,F_{n,p}^2}{2n^2\langle \mu_p, x^2\rangle^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On en déduit

$$\frac{\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^4}{\left(\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^2\right)^2} = \frac{\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle^2}{\left(\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2\rangle\right)^2} = 1 + \frac{1}{\langle \mu_p, x^2\rangle^2} \cdot \frac{\operatorname{Var} F_{n,p}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

Second ordre asymptotique

On a vu que $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle \to \langle \mu_p, x^2 \rangle$ p.s. et en moments. Que peut-on dire de

$$F_{n,p} := n\Big(\langle L_{n,p}, x^2 \rangle - \langle \mu_p, x^2 \rangle\Big)\ ?$$

Lemme. Si $p \in (3, \infty)$, alors $F_{n,p}$ converge en loi et en moments vers une variable $\mathcal{N}(m_p, \frac{1}{4\beta})$ lorsque $n \to \infty$.

Fin de la preuve. On écrit $\langle L_{n,p}, x^2 \rangle = \langle \mu_p, x^2 \rangle + \frac{1}{n} F_{n,p}$. Alors

$$\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2 \rangle^q = \langle \mu_p, x^2 \rangle^q \left(1 + \frac{q\ \mathbb{E}\, F_{n,p}}{n\langle \mu_p, x^2 \rangle} + \frac{q(q-1)\,\mathbb{E}\, F_{n,p}^2}{2n^2 \langle \mu_p, x^2 \rangle^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right).$$

On en déduit

$$\frac{\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^4}{\big(\mathbb{E}_{n,p}\,|\boldsymbol{x}|^2\big)^2} = \frac{\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2 \rangle^2}{\big(\mathbb{E}\,\langle L_{n,p}, x^2 \rangle\big)^2} = 1 + \frac{1}{\langle \mu_p, x^2 \rangle^2} \cdot \frac{\operatorname{Var} F_{n,p}}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

et on conclut facilement avec $\operatorname{Var} F_{n,p} = \frac{1}{4\beta} + o(1)$ et $\langle \mu_p, x^2 \rangle = \frac{p}{2p+4}$. ■

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$.

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p\rceil-1}$...

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$...
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p |x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$...
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.
- Convergence de la FGM de $F_{n,p} \coloneqq n\big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\big)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{sF_{n,p}} = o(1) + \frac{\mathrm{e}^{-sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}{Z_{n,p}} \int_{U^n} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H_{n,p}(\boldsymbol{x}) - \frac{2s}{\beta n}\cdot\frac{1}{n}|\boldsymbol{x}|^2\right)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$…
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.
- Convergence de la FGM de $F_{n,p} := n\big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\big)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{sF_{n,p}} = o(1) + \frac{\mathrm{e}^{-sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}{Z_{n,p}} \int_{U^n} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H_{n,p}(\boldsymbol{x}) - \overset{t}{\boxed{\frac{2s}{\beta n}}} \cdot \frac{1}{n}|\boldsymbol{x}|^2\right)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$...
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.
- Convergence de la FGM de $F_{n,p} := n\big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\big)$:

$$\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{sF_{n,p}} = o(1) + \frac{\mathrm{e}^{-sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}{Z_{n,p}} \int_{U^n} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H_{n,p}(\boldsymbol{x}) - \overset{t}{\frac{2s}{\beta n}} \cdot \frac{1}{n}|\boldsymbol{x}|^2\right)} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boxed{H_{n,p}^t := H_{n,p} - \frac{t}{n}|\boldsymbol{x}|^2}$$

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$...
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.
- Convergence de la FGM de $F_{n,p} := n\big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\big)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{e}^{sF_{n,p}} = o(1) + \frac{\mathrm{e}^{-sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}{Z_{n,p}} \int_{U^n} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H_{n,p}(\boldsymbol{x}) - \overset{t}{\boxed{\frac{2s}{\beta n}}}\cdot\frac{1}{n}|\boldsymbol{x}|^2\right)} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boxed{H^t_{n,p} := H_{n,p} - \frac{t}{n}|\boldsymbol{x}|^2}$$

$$\overset{\substack{\vartheta_t = \mathrm{Id} + t\psi_p \\ x_i \leftarrow \vartheta_t(y_i)}}{=} o(1) + \frac{\mathbb{E}_{n,p}\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H^t_{n,p}\circ\vartheta_t - H_{n,p}\right) + n\langle L_n, \log(1 + t\psi_p')\rangle}\,\mathbb{1}_{U^n_t}}{\mathrm{e}^{sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}.$$

Second ordre asymptotique

Ébauche de preuve du lemme.

- TCL pour fluctuations de β-ensembles. [Johansson '98 ; Shcherbina '13 ; Borot-Guionnet '13 ; Bekerman-Leblé-Serfaty '18 ; Lambert-Ledoux-Webb '19]
- Du fait de leur généralité, ces théorèmes requièrent un potentiel extérieur au moins $\mathcal{C}^6$. Ici $V_p(x) = 2\gamma_p|x|^p$ est seulement $\mathcal{C}^{\lceil p \rceil - 1}$...
- En spécialisant la preuve de BLS, on peut descendre à $p > 3$.
- Convergence de la FGM de $F_{n,p} := n\big(\langle L_{n,p}, x^2\rangle - \langle \mu_p, x^2\rangle\big)$:

$$\mathbb{E}\, \mathrm{e}^{sF_{n,p}} = o(1) + \frac{\mathrm{e}^{-sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}{Z_{n,p}} \int_{U^n} \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H_{n,p}(\boldsymbol{x}) - \overbrace{\frac{2s}{\beta n}}^{t} \cdot \frac{1}{n}|\boldsymbol{x}|^2\right)} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\boxed{H^t_{n,p} := H_{n,p} - \frac{t}{n}|\boldsymbol{x}|^2}$$

$$\overset{\substack{\vartheta_t = \mathrm{Id} + t\psi_p \\ x_i \leftarrow \vartheta_t(y_i)}}{=} o(1) + \frac{\mathbb{E}_{n,p}\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta n^2}{2}\left(H^t_{n,p}\circ\vartheta_t - H_{n,p}\right) + n\langle L_n, \log(1 + t\psi_p')\rangle} \mathbb{1}_{U_t^n}}{\mathrm{e}^{sn\langle \mu_p, x^2\rangle}}.$$

- Taylor-Young lorsque $t \to 0$ ($n \to \infty$) et choix de $\psi_p \in \mathcal{C}^3$ résolvant

$$V_p'(x)\psi(x) - 2\int \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y}\, \mu_p(\mathrm{d}y) = x^2 + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Merci de votre attention !