

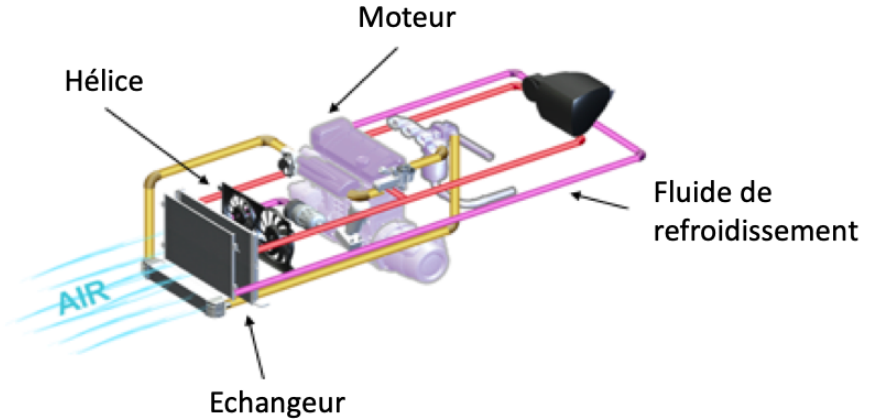
Régression par processus Gaussiens dans des espaces emboîtés

Thierry Gonon

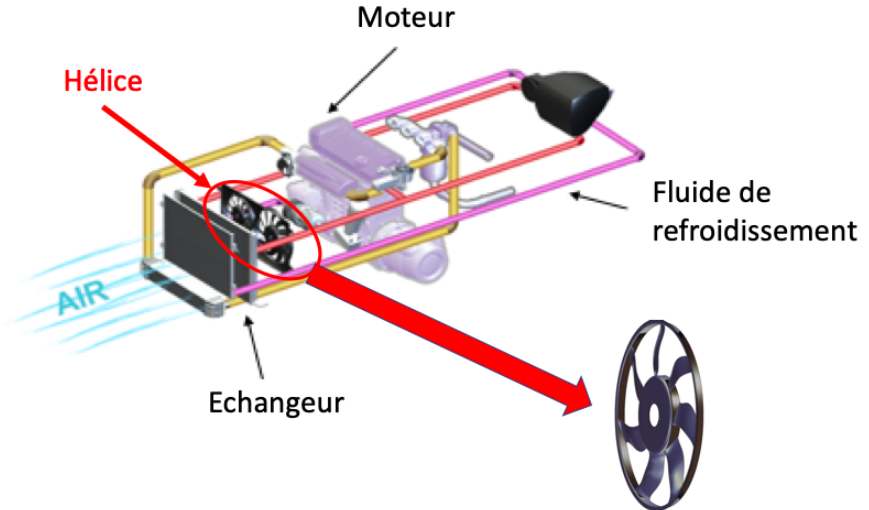
Ecole Centrale de Lyon, Valeo

Journées MAS, Lundi 29 août 2022

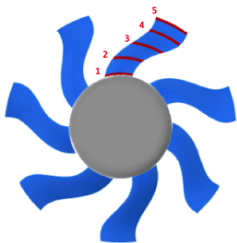
Système de refroidissement du moteur



Système de refroidissement du moteur

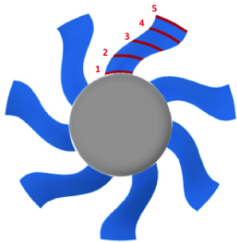


Code de calcul

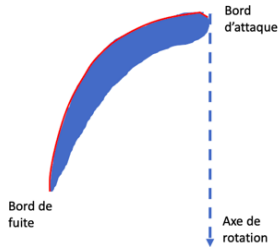


Sections de pale

Code de calcul

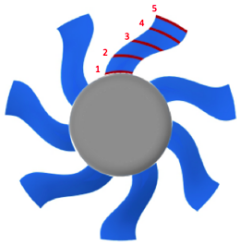


Sections de pale

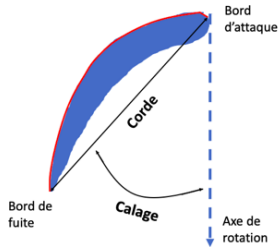


**Calage et longueur
de corde**

Code de calcul

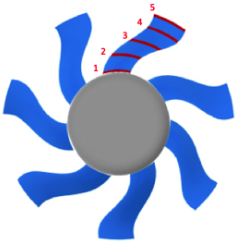


Sections de pale

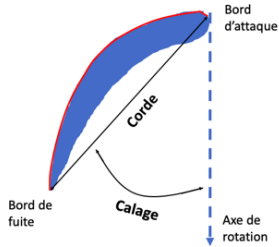


Calage et longueur de corde

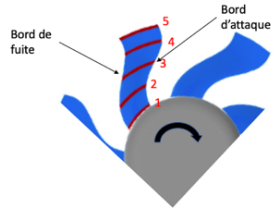
Code de calcul



Sections de pale

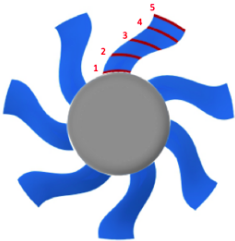


Calage et longueur de corde

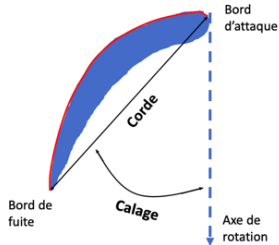


Empilement tangentiel

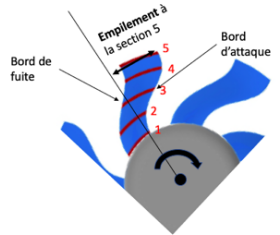
Code de calcul



Sections de pale

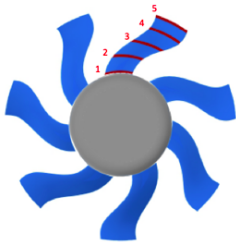


Calage et longueur de corde

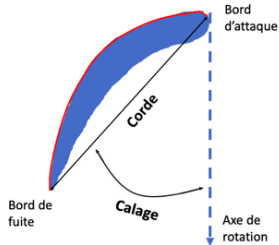


Empilement tangentiel

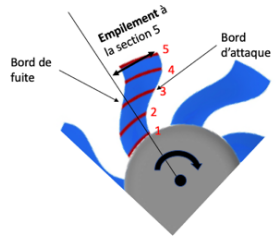
Code de calcul



Sections de pale



Calage et longueur de corde



Empilement tangentiel

Variables de sortie

- Perte de charge : ΔP (en Pa)
- Couple : T (en $N.m$)
- Rendement : $\frac{\Delta P Q}{T \Omega}$ (avec Q en $m^3.s^{-1}$ et Ω en $rad.s^{-1}$).

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Quelle étude ? Séquentielle en libérant les variables par groupe (plan d'expérience + métamodèle à chaque étape).

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Quelle étude ? Séquentielle en libérant les variables par groupe (plan d'expérience + métamodèle à chaque étape).

- On ne considère que les calages

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Quelle étude ? Séquentielle en libérant les variables par groupe (plan d'expérience + métamodèle à chaque étape).

- On ne considère que les calages
- On rajoute les cordes

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Quelle étude ? Séquentielle en libérant les variables par groupe (plan d'expérience + métamodèle à chaque étape).

- On ne considère que les calages
- On rajoute les cordes
- On rajoute les empilements...

Exploitation de la simulation

Code de simulation lourd \Rightarrow couplé à un métamodèle.

Problème : beaucoup d'entrées (Calages, cordes, empilements tangentiels, cambrures, épaisseurs...)

Quelle étude ? Séquentielle en libérant les variables par groupe (plan d'expérience + métamodèle à chaque étape).

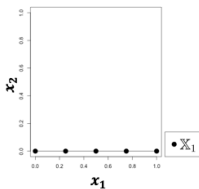
- On ne considère que les calages
- On rajoute les cordes
- On rajoute les empilements...

Quel métamodèle adapté à cette étude séquentielle ? Le but est de prendre en compte tous les plans d'expérience de l'étude.

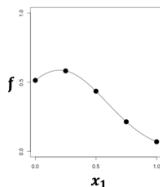
Exemple 2D

Fonction de 2 variables $f(x_1, x_2) = \exp\left(\frac{(x_1-0.2)^2+(x_2-0.4)^2}{0.3}\right)$.

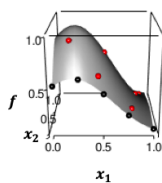
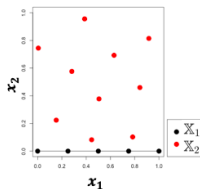
Entrées



Sortie



Etape 1

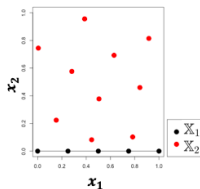
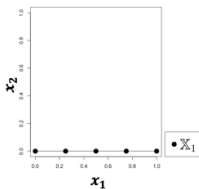


Etape 2

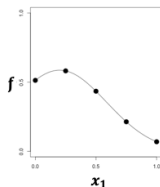
Exemple 2D

Fonction de 2 variables $f(x_1, x_2) = \exp\left(\frac{(x_1-0.2)^2+(x_2-0.4)^2}{0.3}\right)$.

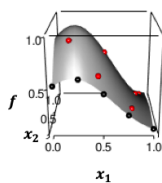
Entrées



Sortie



Etape 1



Etape 2

Quel métamodèle à l'étape 2 ?

Table des matières

- 1 Métamodèle seqGPR
 - Nouveau modèle
 - Processus correctif
- 2 Estimation des paramètres
- 3 Applications
 - Test analytique
 - Test industriel
- 4 Conclusion

Table des matières

1 Métamodèle seqGPR

- Nouveau modèle
- Processus correctif

2 Estimation des paramètres

3 Applications

- Test analytique
- Test industriel

4 Conclusion

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000],

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x'_1))$ avec k_1 stationnaire

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x'_1))$ avec k_1 stationnaire
- $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)))$

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x'_1))$ avec k_1 stationnaire
- $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)))$
- $Z_2(x_1, 0) = 0$

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x'_1))$ avec k_1 stationnaire
- $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)))$
- $Z_2(x_1, 0) = 0$
- $Y_1 \perp Z_2$

Nouveau modèle

seqGPR inspiré de multifidélité [Kennedy and O'Hagan, 2000], f réalisation de :

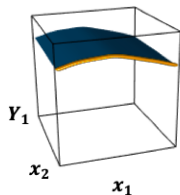
$$Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x'_1))$ avec k_1 stationnaire
- $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)))$
- $Z_2(x_1, 0) = 0$
- $Y_1 \perp Z_2$

f réalisation de $Y_2 \sim \mathcal{PG}(m, k_1(x_1, x_1) + k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)))$

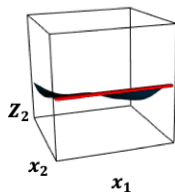
Interprétation

Interprétation



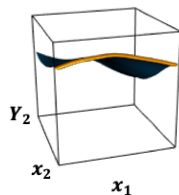
Etape 1 :
 $f(x_1, 0)$ réalisation de $Y_1(x_1)$

+



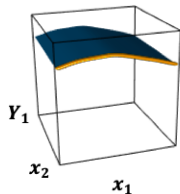
Processus correctif :
 $Z_2(x_1, x_2)$

=



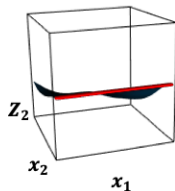
Etape 2 :
 $f(x_1, x_2)$ réalisation de
 $Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$

Interprétation



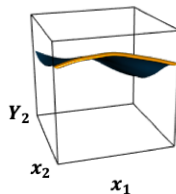
Etape 1 :
 $f(x_1, 0)$ réalisation de $Y_1(x_1)$

+



Processus correctif :
 $Z_2(x_1, x_2)$

=

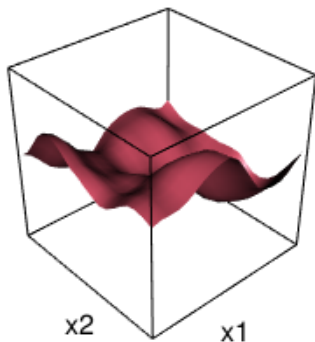


Etape 2 :
 $f(x_1, x_2)$ réalisation de
 $Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$

Comment construire Z_2 tel que $Z_2(x_1, 0) = 0$?

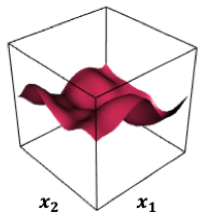
Introduction

Le but est de construire $Z_2(x_1, x_2)$ tel que $Z_2(x_1, 0) = 0$ en transformant un processus latent $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ de noyau κ connu

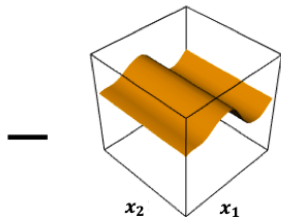


Premier candidat : processus Red (Réduit)

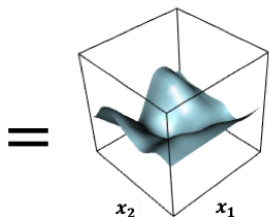
Le processus Red est défini par $Z_2^{Red}(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$



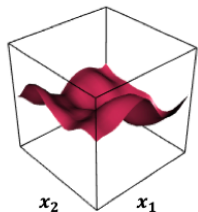
Valeur sur la droite :
 $\tilde{Z}_2(x_1, 0)$



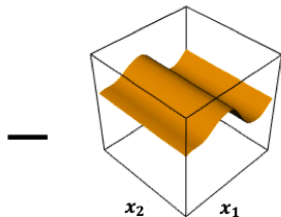
Processus Red :
 $Z_2^{Red}(x_1, x_2)$

Premier candidat : processus Red (Réduit)

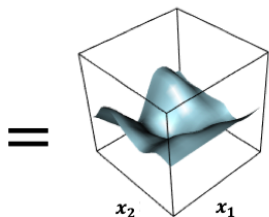
Le processus Red est défini par $Z_2^{Red}(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$



Valeur sur la droite :
 $\tilde{Z}_2(x_1, 0)$

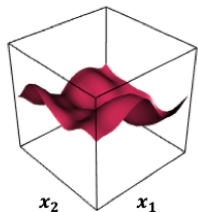


Processus Red :
 $Z_2^{Red}(x_1, x_2)$

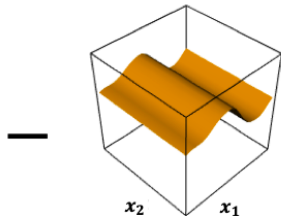
$$Z_2^{Red} \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$$

Premier candidat : processus Red (Réduit)

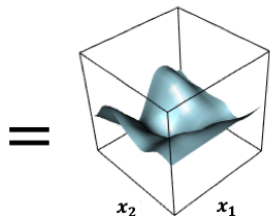
Le processus Red est défini par $Z_2^{Red}(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$



Valeur sur la droite :
 $\tilde{Z}_2(x_1, 0)$



Processus Red :
 $Z_2^{Red}(x_1, x_2)$

$$Z_2^{Red} \sim \mathcal{PG}(0, k_2) \text{ avec } k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) + \kappa((x_1, 0), (x'_1, 0)) - \kappa((x_1, 0), (x'_1, x'_2)) - \kappa((x_1, x_2), (x'_1, 0)).$$

Deuxième candidat : processus P (Préconditionné)

Le processus P est celui de [Gauthier and Bay, 2012] défini par

$$Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}(\mathcal{D}) \right]$$

avec

$$\mathcal{D} = \{(t_1, 0), t_1 \in [0, 1]\}$$

Deuxième candidat : processus P (Préconditionné)

Le processus P est celui de [Gauthier and Bay, 2012] défini par

$$Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}(\mathcal{D}) \right]$$

avec

$$\mathcal{D} = \{(t_1, 0), t_1 \in [0, 1]\}$$

Proposition

Si le processus latent $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ a un noyau produit tensoriel

$$\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1)\kappa_2(x_2, x'_2)$$

Alors l'espérance conditionnelle vaut :

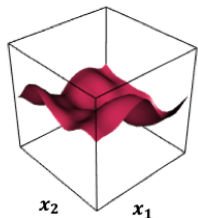
$$\mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}(\mathcal{D}) \right] = \kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$$

Deuxième candidat : processus P

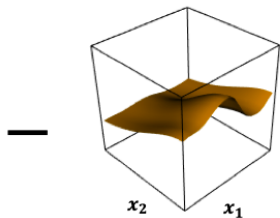
Ainsi, en prenant $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ avec $\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1)\kappa_2(x_2, x'_2)$,

Deuxième candidat : processus P

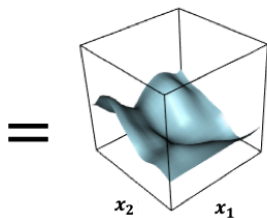
Ainsi, en prenant $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ avec $\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1)\kappa_2(x_2, x'_2)$, le processus P est défini par $Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$



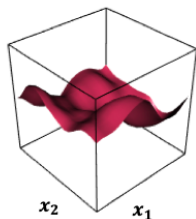
Projection sur la droite:
 $\kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$



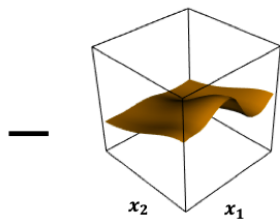
Processus P :
 $Z_2^P(x_1, x_2)$

Deuxième candidat : processus P

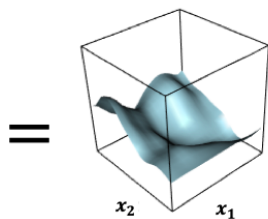
Ainsi, en prenant $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ avec $\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1)\kappa_2(x_2, x'_2)$,
 le processus P est défini par $Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$



Projection sur la droite:
 $\kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$

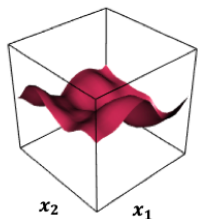


Processus P :
 $Z_2^P(x_1, x_2)$

$$Z_2^P \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$$

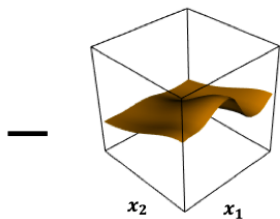
Deuxième candidat : processus P

Ainsi, en prenant $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ avec $\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1)\kappa_2(x_2, x'_2)$, le processus P est défini par $Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$.



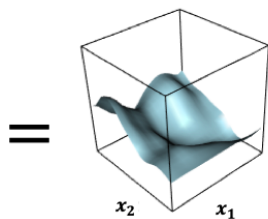
Processus Latent :

$$\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$$



Projection sur la droite:

$$\kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$$



Processus P :

$$Z_2^P(x_1, x_2)$$

$$Z_2^P \sim \mathcal{PG}(0, k_2) \text{ avec} \\
k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \kappa_1(x_1, x'_1) [\kappa_2(x_2, x'_2) - \kappa_2(x_2, 0)\kappa_2(x'_2, 0)].$$

Résumé processus correctif

Résumé processus correctif

Processus latent $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{GP}(0, \kappa)$

Résumé processus correctif

Processus latent $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{GP}(0, \kappa)$

- Processus Red (Réduit) :

$$Z_2^{Red}(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \tilde{Z}_2(x_1, 0)$$

Résumé processus correctif

Processus latent $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{GP}(0, \kappa)$

- Processus Red (Réduit) :

$$Z_2^{Red}(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \tilde{Z}_2(x_1, 0)$$

- Processus P (Préconditionné) :

$$Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$$

Table des matières

- 1 Métamodèle seqGPR
 - Nouveau modèle
 - Processus correctif
- 2 Estimation des paramètres
- 3 Applications
 - Test analytique
 - Test industriel
- 4 Conclusion

Problème d'estimation

Problème d'estimation

- Rappel du modèle : $Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$ avec
 - $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1)$, k_1 stationnaire
 - $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$, Red ou P $\Rightarrow Z_2(x_1, 0) = 0$
 - $Z_2 \perp Y_1$

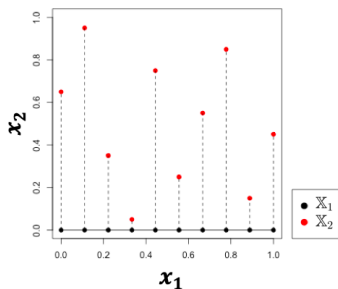
Problème d'estimation

- Rappel du modèle : $Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$ avec
 - $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1)$, k_1 stationnaire
 - $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$, Red ou P $\Rightarrow Z_2(x_1, 0) = 0$
 - $Z_2 \perp Y_1$
- On doit estimer $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ avec η_1 paramètres de Y_1 et η_2 paramètres de Z_2 . On dispose de $(\mathbb{X}_1, \mathbf{y}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathbf{y}_2)$.

Problème d'estimation

- Rappel du modèle : $Y_2(x_1, x_2) = Y_1(x_1) + Z_2(x_1, x_2)$ avec
 - $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1)$, k_1 stationnaire
 - $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$, Red ou P $\Rightarrow Z_2(x_1, 0) = 0$
 - $Z_2 \perp Y_1$
- On doit estimer $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ avec η_1 paramètres de Y_1 et η_2 paramètres de Z_2 . On dispose de $(\mathbb{X}_1, \mathbf{y}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathbf{y}_2)$.
- On utilise le max de vraisemblance $\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta)$

Plans imbriqués



Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

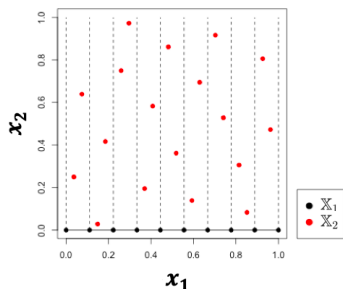
- η_1 : paramètres de Y_1

$$\max_{\eta_1} \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1; \eta_1)$$

- η_2 : paramètres de Z_2

$$\max_{\eta_2} \mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$$

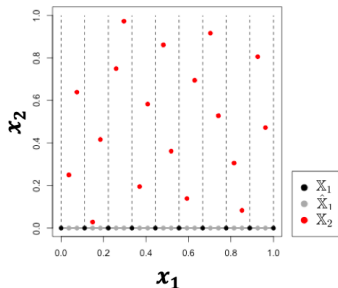
Plans non-imbriqués



La vraisemblance $\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = y_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = y_2; \eta)$ ne peut plus être découplée.

Plans non-imbriqués

Plans non-imbriqués



La vraisemblance $\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta)$ ne peut plus être découpée.

La vraisemblance $\mathcal{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta)$ peut de nouveau être découpée en $\mathcal{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1) \mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$

Plans virtuellement complétés de sorte que \mathbb{X}_2 est imbriqué dans

$$\tilde{\mathbb{X}}_1 = \mathbb{X}_1 \cup \hat{\mathbb{X}}_1.$$

Espérance-Maximisation (EM) [Friedman et al., 2001]

L'algorithme EM consiste en la création des suites

$$(\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1))_i, (\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2))_i, \text{ et } (\eta^{(i)})_i.$$

Espérance-Maximisation (EM) [Friedman et al., 2001]

L'algorithme EM consiste en la création des suites

$$(\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1))_i, (\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2))_i, \text{ et } (\eta^{(i)})_i.$$

A chaque itération $i + 1$,

Espérance-Maximisation (EM) [Friedman et al., 2001]

L'algorithme EM consiste en la création des suites

$$(\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1))_i, (\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2))_i, \text{ et } (\eta^{(i)})_i.$$

A chaque itération $i + 1$,

- Espérance :

- $\hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1) = \mathbb{E}_{\eta^{(i)}}[\mathcal{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1) \mid Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2]$
- $\hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2) = \mathbb{E}_{\eta^{(i)}}[\mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2) \mid Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2]$

Espérance-Maximisation (EM) [Friedman et al., 2001]

L'algorithme EM consiste en la création des suites

$$(\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1))_i, (\hat{\mathcal{L}}^{(i)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2))_i, \text{ et } (\eta^{(i)})_i.$$

A chaque itération $i + 1$,

- Espérance :

- $\hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1) = \mathbb{E}_{\eta^{(i)}}[\mathcal{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1) \mid Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2]$
- $\hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2) = \mathbb{E}_{\eta^{(i)}}[\mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2) \mid Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2]$

- Maximisation :

- $\eta_1^{(i+1)} : \max_{\eta_1} \hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$
- $\eta_2^{(i+1)} : \max_{\eta_2} \hat{\mathcal{L}}^{(i+1)}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$

Table des matières

- 1 Métamodèle seqGPR
 - Nouveau modèle
 - Processus correctif
- 2 Estimation des paramètres
- 3 Applications
 - Test analytique
 - Test industriel
- 4 Conclusion

Etude

On considère la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) & = \left[4 - 2.1(4x_1 - 2)^2 + \frac{(4x_1 - 2)^4}{3} \right] (4x_1 - 2)^2 \\ & + (4x_1 - 2)(2x_2 - 1) + [-4 + 4(2x_2 - 1)^2] (2x_2 - 1)^2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) & = 4 \exp(-\|x - 0.3\|^2) \end{cases}$$

Etude

On considère la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) &= \left[4 - 2.1(4x_1 - 2)^2 + \frac{(4x_1 - 2)^4}{3} \right] (4x_1 - 2)^2 \\ &+ (4x_1 - 2)(2x_2 - 1) + [-4 + 4(2x_2 - 1)^2] (2x_2 - 1)^2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 4 \exp(-\|x - 0.3\|^2) \end{cases}$$

- A l'étape 1, on considère la restriction $f(x_1, x_2, \frac{x_1+x_2}{2}, 0.2x_1 + 0.7)$. On dispose d'un DoE (\mathbb{X}_1, y_1) de taille 20.

Etude

On considère la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) &= \left[4 - 2.1(4x_1 - 2)^2 + \frac{(4x_1 - 2)^4}{3} \right] (4x_1 - 2)^2 \\ &+ (4x_1 - 2)(2x_2 - 1) + [-4 + 4(2x_2 - 1)^2] (2x_2 - 1)^2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 4 \exp(-\|x - 0.3\|^2) \end{cases}$$

- A l'étape 1, on considère la restriction $f(x_1, x_2, \frac{x_1+x_2}{2}, 0.2x_1 + 0.7)$. On dispose d'un DoE (\mathbb{X}_1, y_1) de taille 20.
- A l'étape 2, on considère f . On dispose d'un DoE (\mathbb{X}_2, y_2) de taille 40.

Métamodèles comparés

- **K_tot** : Krigeage ($Y \sim \mathcal{PG}(m, k)$) entraîné sur (\mathbb{X}_1, y_1) et (\mathbb{X}_2, y_2) .

Métamodèles comparés

- **K_tot** : Krigeage ($Y \sim \mathcal{PG}(m, k)$) entraîné sur (\mathbb{X}_1, y_1) et (\mathbb{X}_2, y_2) .
- **K_2** : Krigeage ($Y \sim \mathcal{PG}(m, k)$) entraîné sur (\mathbb{X}_2, y_2) .

Métamodèles comparés

- K_{tot} : Krigeage ($Y \sim \mathcal{PG}(m, k)$) entraîné sur (\mathbb{X}_1, y_1) et (\mathbb{X}_2, y_2) .
- K_{2} : Krigeage ($Y \sim \mathcal{PG}(m, k)$) entraîné sur (\mathbb{X}_2, y_2) .
- **seqGPR** : Krigeage ($(Y_2 \sim \mathcal{PG}(m, k_1 + k_2))$) entraîné sur (\mathbb{X}_1, y_1) et (\mathbb{X}_2, y_2) .

$$\begin{cases} Y_2(x_1, x_2, x_3, x_4) & = Y_1(x_1, x_2) + Z_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ Z_2(x_1, x_2, \frac{x_1+x_2}{2}, 0.2x_1 + 0.7) & = 0, \end{cases}$$

- $Y_1 \sim \mathcal{PG}(m, k_1)$
- $Z_2 \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$ un processus **Red** ou **P** construit par transformation de \tilde{Z}_2 .
- $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{PG}(0, \kappa)$ indépendant de Y_1 avec paramétrisation robuste de κ : $(\alpha, \alpha, \theta_3, \theta_4)$.

$k, k_1,$ et κ sont des produits tensoriels Matern $\frac{5}{2}$.

Résultats

RMSE sur une suite de Sobol de taille 10000. Mediane et écart interquartile des RMSE sur 100 échantillons différents (\mathbb{X}_1, y_1) de taille 20, (\mathbb{X}_2, y_2) de taille 40. **Red** est meilleur.

	K_2	K_tot	P	Red
Médiane	0.44	0.17	0.12	0.07
Ecart interquartile	0.05	0.09	0.05	0.02

Résultats

RMSE sur une suite de Sobol de taille 10000. Mediane et écart interquartile des RMSE sur 100 échantillons différents (\mathbb{X}_1, y_1) de taille 20, (\mathbb{X}_2, y_2) de taille 40. **Red** est meilleur.

	K_2	K_tot	P	Red
Médiane	0.44	0.17	0.12	0.07
Ecart interquartile	0.05	0.09	0.05	0.02

Variation de la taille des plans sans incidence.

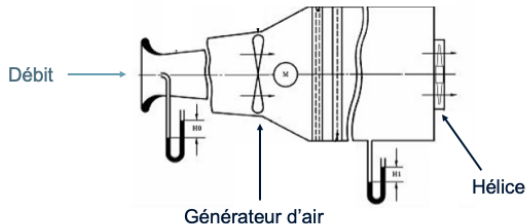
Variables considérées

Entrées

Variables considérées

Entrées

Débit



Variables considérées

Entrées

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

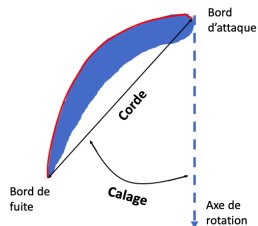
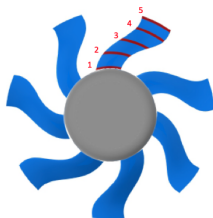
LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5



Variables considérées

Entrées

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

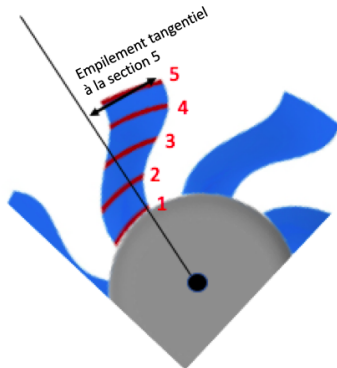
LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5



Variables considérées

Entrées

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5

Sortie : ΔP

Etude

Etude

Etape 1

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2=1

Empilement_3=1

Empilement_4=0.82

Empilement_5=0.517645

Etude

Etape 1

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2=1

Empilement_3=1

Empilement_4=0.82

Empilement_5=0.517645

Etape 2

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5

Etude

Etape 1

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2=1

Empilement_3=1

Empilement_4=0.82

Empilement_5=0.517645

Etape 2

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5

- 30 modèles
- \mathbb{X}_1 : 50 points de $[0, 1]^{11}$
- \mathbb{X}_2 : 50 points de $[0, 1]^{15}$

Etude

Etape 1

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2=1

Empilement_3=1

Empilement_4=0.82

Empilement_5=0.517645

Etape 2

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5

- 30 modèles
- \mathbb{X}_1 : 50 points de $[0, 1]^{11}$
- \mathbb{X}_2 : 50 points de $[0, 1]^{15}$

	Mediane	Ecart
K_tot	44.6	5.9
P	41.2	4.7
Red	42.1	4.6

Etude

Etape 1

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2=1

Empilement_3=1

Empilement_4=0.82

Empilement_5=0.517645

Etape 2

Débit

Calage_1

Calage_2

Calage_3

Calage_4

Calage_5

LCorde_1

LCorde_2

LCorde_3

LCorde_4

LCorde_5

Empilement_2

Empilement_3

Empilement_4

Empilement_5

- 30 modèles
- \mathbb{X}_1 : 50 points de $[0, 1]^{11}$
- \mathbb{X}_2 : 50 points de $[0, 1]^{15}$

	Mediane	Ecart
K_tot	44.6	5.9
P	41.2	4.7
Red	42.1	4.6

même tendance pour T .

Table des matières

- 1 Métamodèle seqGPR
 - Nouveau modèle
 - Processus correctif
- 2 Estimation des paramètres
- 3 Applications
 - Test analytique
 - Test industriel
- 4 Conclusion

Conclusion

- Modèle autorégressif inspiré de la multifidélité

Conclusion

- Modèle autorégressif inspiré de la multifidélité
- Contrainte de nullité vérifiée par le processus correctif : définition de 2 candidats (Red et P)

Conclusion

- Modèle autorégressif inspiré de la multifidélité
- Contrainte de nullité vérifiée par le processus correctif : définition de 2 candidats (Red et P)
- Algorithme EM pour estimer les paramètres

Conclusion

- Modèle autorégressif inspiré de la multifidélité
- Contrainte de nullité vérifiée par le processus correctif : définition de 2 candidats (Red et P)
- Algorithme EM pour estimer les paramètres
- Code R pour noyaux, EM

Conclusion

- Modèle autorégressif inspiré de la multifidélité
- Contrainte de nullité vérifiée par le processus correctif : définition de 2 candidats (Red et P)
- Algorithme EM pour estimer les paramètres
- Code R pour noyaux, EM
- Bons résultats sur les cas tests

Merci de votre attention

References I



Bachoc, F. (2013).

Parametric estimation of covariance function in Gaussian-process based Kriging models. Application to uncertainty quantification for computer experiments.

PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII.



Friedman, J., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2001).

The elements of statistical learning, volume 1.

Springer series in statistics New York.






Gauthier, B. and Bay, X. (2012).

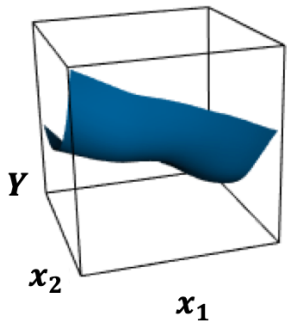
Spectral approach for kernel-based interpolation.

In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 21, pages 439–479.

References II

-  Kennedy, M. C. and O'Hagan, A. (2000).
Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available.
Biometrika, 87(1) :1–13.
-  Santner, T. J., Williams, B. J., Notz, W., and Williams, B. J. (2003).
The design and analysis of computer experiments, volume 1.
Springer.
-  Williams, C. K. and Rasmussen, C. E. (2006).
Gaussian processes for machine learning, volume 2.
MIT press Cambridge, MA.

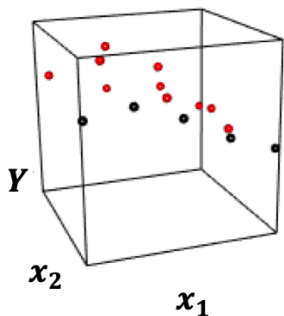
Régression par processus Gaussien [Santner et al., 2003] [Williams and Rasmussen, 2006]



La sortie f est la réalisation d'un processus Gaussien

$$Y(x_1, x_2) \sim \mathcal{PG}(m, k)$$

Régression par processus Gaussien [Santner et al., 2003] [Williams and Rasmussen, 2006]

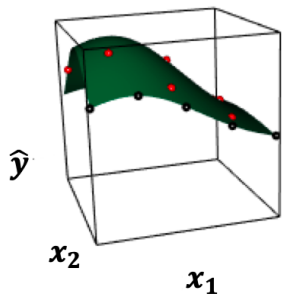


La sortie f est la réalisation d'un processus Gaussien

$$Y(x_1, x_2) \sim \mathcal{PG}(m, k)$$

On dispose du plan d'entraînement (\mathbb{X}, \mathbf{y}) avec $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$.

Régression par processus Gaussien [Santner et al., 2003] [Williams and Rasmussen, 2006]



La sortie f est la réalisation d'un processus Gaussien

$$Y(x_1, x_2) \sim \mathcal{PG}(m, k)$$

On dispose du plan d'entraînement (\mathbb{X}, \mathbf{y}) avec $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$.

Prédiction :

$$\hat{y}(x_1, x_2) = m + k((x_1, x_2), \mathbb{X})k(\mathbb{X}, \mathbb{X})^{-1}(\mathbf{y} - m)$$

Estimation des paramètres

$Y \sim \mathcal{PG}(m, k_{(\sigma^2, \theta)})$ avec

$$k((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \sigma^2 \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} + \frac{5(x_i - x'_i)^2}{3\theta_i^2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} \right)$$

Estimation des paramètres

$Y \sim \mathcal{PG}(m, k_{(\sigma^2, \theta)})$ avec

$$k((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \sigma^2 \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} + \frac{5(x_i - x'_i)^2}{3\theta_i^2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} \right)$$

On estime $\eta = (m, \sigma^2, \theta_1, \theta_2)$ à partir du plan d'expérience (\mathbb{X}, \mathbf{y}) (taille $n_{\mathbb{X}}$) par maximum de vraisemblance

Estimation des paramètres

$Y \sim \mathcal{PG}(m, k_{(\sigma^2, \theta)})$ avec

$$k((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \sigma^2 \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} + \frac{5(x_i - x'_i)^2}{3\theta_i^2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} \right)$$

On estime $\eta = (m, \sigma^2, \theta_1, \theta_2)$ à partir du plan d'expérience (\mathbb{X}, \mathbf{y}) (taille $n_{\mathbb{X}}$) par maximum de vraisemblance

$$\mathcal{L}(Y(\mathbb{X}) = \mathbf{y}; \eta) =$$

Estimation des paramètres

$Y \sim \mathcal{PG}(m, k_{(\sigma^2, \theta)})$ avec

$$k((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \sigma^2 \prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} + \frac{5(x_i - x'_i)^2}{3\theta_i^2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{5} |x_i - x'_i|}{\theta_i} \right)$$

On estime $\eta = (m, \sigma^2, \theta_1, \theta_2)$ à partir du plan d'expérience (\mathbb{X}, \mathbf{y}) (taille $n_{\mathbb{X}}$) par maximum de vraisemblance

$$\mathcal{L}(Y(\mathbb{X}) = \mathbf{y}; \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_{\mathbb{X}}}{2}} |k(\mathbb{X}, \mathbb{X})|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{y} - m)^T k(\mathbb{X}, \mathbb{X})^{-1} (\mathbf{y} - m)}{2} \right)$$

Remarque

Le modèle est plus général

- Plus d'étapes

Remarque

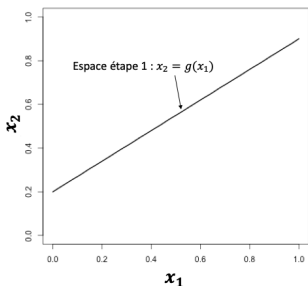
Le modèle est plus général

- Plus d'étapes
- Plusieurs variables libérées par étape

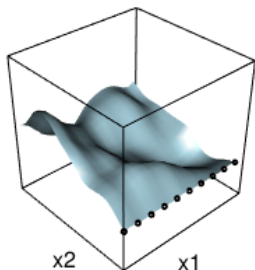
Remarque

Le modèle est plus général

- Plus d'étapes
- Plusieurs variables libérées par étape
- Les variables fixées pas nécessairement constantes égales à 0 mais fonction des variables libres



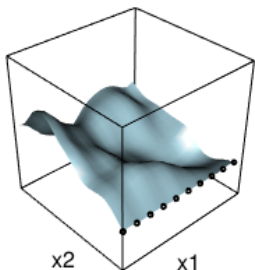
Etat de l'art : conditionnement fini



On conditionne \tilde{Z}_2 à valoir 0 sur un ensemble fini de points \mathbb{D} de la droite $x_2 = 0$:

$$Z_2(x_1, x_2) = \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(\mathbb{D}) = 0 \right]$$

Etat de l'art : conditionnement fini



On conditionne \tilde{Z}_2 à valoir 0 sur un ensemble fini de points \mathbb{D} de la droite $x_2 = 0$:

$$Z_2(x_1, x_2) = \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(\mathbb{D}) = 0 \right]$$

⇒ **Lourd numériquement**

Etat de l'art : conditionnement infini

On considère le processus défini par [Gauthier and Bay, 2012] :

$$Z_2(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \underbrace{\mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]}_{\rho_{H_1}(\tilde{Z}_2(x_1, x_2))}$$

où $H_1 = \overline{\text{Vect} \left(\tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right)}$.

Etat de l'art : conditionnement infini

On considère le processus défini par [Gauthier and Bay, 2012] :

$$Z_2(x_1, x_2) = \underbrace{\tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]}_{\rho_{H_1}(\tilde{Z}_2(x_1, x_2))}$$

où $H_1 = \overline{\text{Vect} \left(\tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right)}$. La projection est définie par :

$$\rho_{H_1}(\tilde{Z}_2(x_1, x_2)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x_1, x_2) \int_0^1 \tilde{\phi}_n(t_1) \tilde{Z}_2(t_1, 0) dt_1$$

où $\phi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \kappa((x_1, x_2), (t_1, 0)) \tilde{\phi}_n(t_1) dt_1$ issu du problème aux valeurs propres

$$\int_0^1 \kappa((x_1, 0), (t_1, 0)) \tilde{\phi}_n(t_1) dt_1 = \lambda_n \tilde{\phi}_n(x_1)$$

Etat de l'art : conditionnement infini

Proposition

Approximer $Z_2 = \tilde{Z}_2 - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]$ en discretisant son problème aux valeurs propres dans \mathbb{D} revient à le remplacer par le conditionnement sur un ensemble fini de points $\left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(\mathbb{D}) = 0 \right]$.

Etat de l'art : conditionnement infini

Proposition

Approximer $Z_2 = \tilde{Z}_2 - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]$ en discretisant son problème aux valeurs propres dans \mathbb{D} revient à le remplacer par le conditionnement sur un ensemble fini de points $\left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(\mathbb{D}) = 0 \right]$.

Cette première approche n'est pas retenue.

Etat de l'art : conditionnement infini

Proposition

Approximer $Z_2 = \tilde{Z}_2 - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]$ en discretisant son problème aux valeurs propres dans \mathbb{D} revient à le remplacer par le conditionnement sur un ensemble fini de points $\left[\tilde{Z}_2 \mid \tilde{Z}_2(\mathbb{D}) = 0 \right]$.

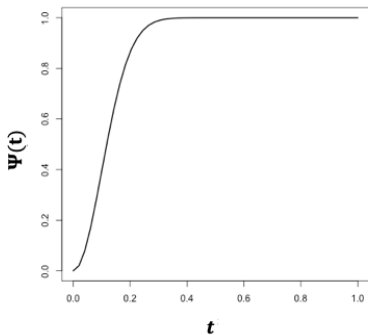
Cette première approche n'est pas retenue.

La question de la construction du processus correctif reste entière.

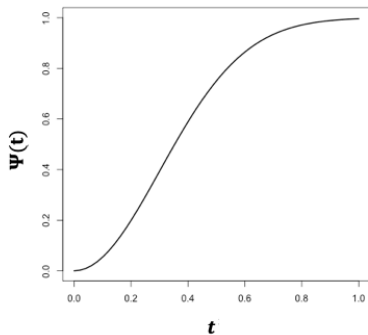
Premier candidat : processus Psi

Premier candidat : processus Psi

On se donne $\Psi(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)$.



$\delta = 0.1$

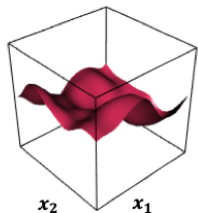


$\delta = 0.3$

Premier candidat : processus Psi

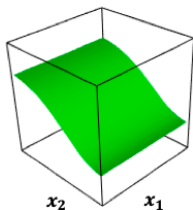
On se donne $\Psi(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)$.

Le processus Psi est défini par $Z_2^{Psi}(x_1, x_2) = \Psi(x_2)\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$.



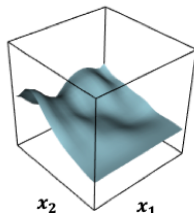
Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$

\times



Fonction Psi :
 $\psi(x_2)$

$=$



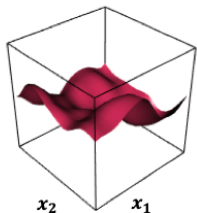
Processus Psi :
 $Z_2^{Psi}(x_1, x_2)$

$$Z_2^{Psi} \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$$

Premier candidat : processus Psi

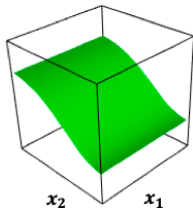
On se donne $\Psi(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)$.

Le processus Psi est défini par $Z_2^{Psi}(x_1, x_2) = \Psi(x_2)\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$.



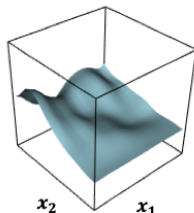
Processus Latent :
 $\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$

\times



Fonction Psi :
 $\psi(x_2)$

$=$

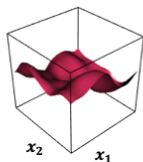


Processus Psi :
 $Z_2^{Psi}(x_1, x_2)$

$Z_2^{Psi} \sim \mathcal{PG}(0, k_2)$ avec $k_2((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \Psi(x_2)\Psi(x'_2)\kappa((x_1, x_2), (x'_1, x'_2))$.

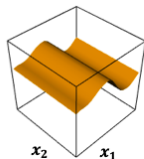
Analyse des transformations

Processus Red



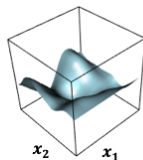
$\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$

—



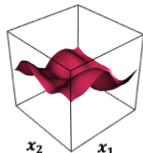
$\tilde{Z}_2(x_1, 0)$

=



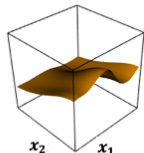
$Z_2^{Red}(x_1, x_2)$

Processus P



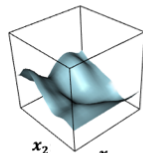
$\tilde{Z}_2(x_1, x_2)$

—



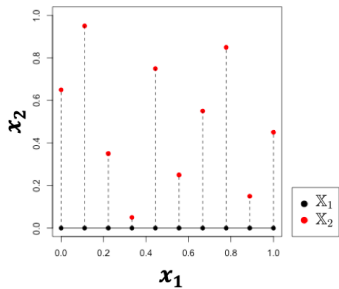
$\kappa_2(x_2, 0)\tilde{Z}_2(x_1, 0)$

=



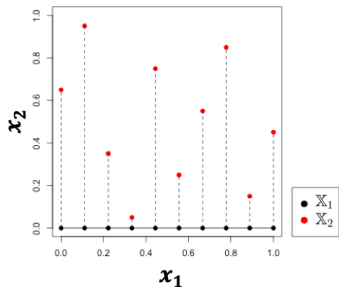
$Z_2^P(x_1, x_2)$

Plans imbriqués



Plans imbriqués

Plans imbriqués

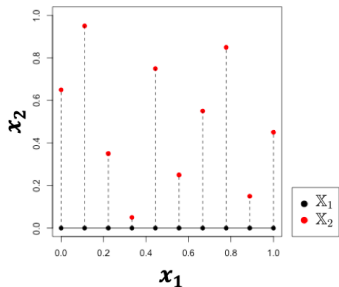


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = y_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = y_2; \eta)$$

Plans imbriqués

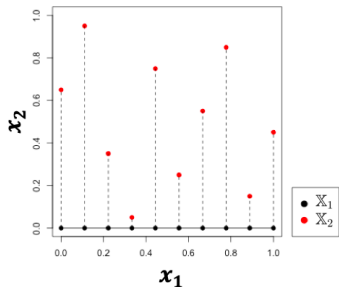


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = y_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = y_2; \eta) \\ = \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = y_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = y_2; \eta)\end{aligned}$$

Plans imbriqués

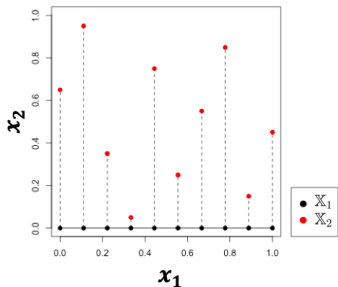


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_1) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta)\end{aligned}$$

Plans imbriqués

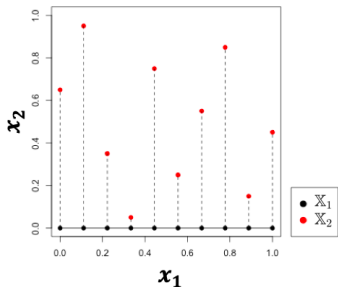


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_1) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta)\end{aligned}$$

Plans imbriqués

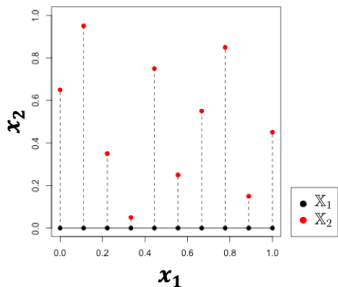


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_1) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1; \eta) \end{aligned}$$

Plans imbriqués

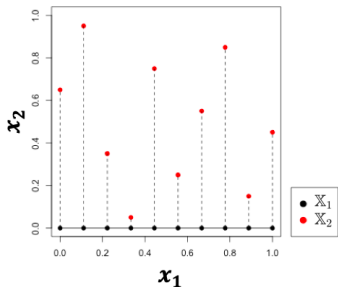


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_1) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta)\end{aligned}$$

Plans imbriqués

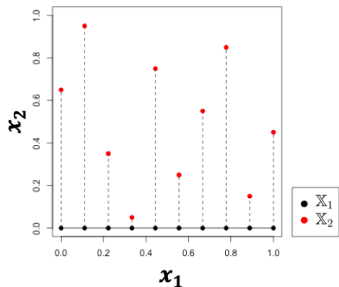


Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_2(:, 1)) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Y_1(\mathbb{X}_1) + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1, Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta) \\ &= \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1; \eta_1) \mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2) \end{aligned}$$

Plans imbriqués



Plans imbriqués

Découplage de la vraisemblance :

- η_1 : paramètres de Y_1

$$\max_{\eta_1} \mathcal{L}(Y_1(\mathbb{X}_1) = \mathbf{y}_1; \eta_1)$$

- η_2 : paramètres de Z_2

$$\max_{\eta_2} \mathcal{L}(Z_2(\mathbb{X}_1) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$$

Construction des plans

Dans l'EM,

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{X}_1) = \tilde{y}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{X}_1), Y_1(\tilde{X}_1))^{-1} = k_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_1)^{-1}$

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Connaissant \mathbb{X}_1 on cherche \mathbb{X}_2 solution des problèmes

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Connaissant \mathbb{X}_1 on cherche \mathbb{X}_2 solution des problèmes

- $\max_{\tilde{\mathbb{X}}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1)$

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{L}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{L}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Connaissant \mathbb{X}_1 on cherche \mathbb{X}_2 solution des problèmes

- $\max_{\tilde{\mathbb{X}}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1)$ où $\Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \text{Maximin}(\tilde{\mathbb{X}}_1)$

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Connaissant \mathbb{X}_1 on cherche \mathbb{X}_2 solution des problèmes

- $\max_{\tilde{\mathbb{X}}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1)$ où $\Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \text{Maximin}(\tilde{\mathbb{X}}_1)$
- $\max_{\mathbb{X}_2} \Phi_2(\mathbb{X}_2)$

Construction des plans

Dans l'EM,

- $\hat{\mathcal{L}}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \tilde{\mathbf{y}}_1; \eta_1)$ met en jeu $\text{cov}(Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1), Y_1(\tilde{\mathbb{X}}_1))^{-1} = k_1(\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_1)^{-1}$
- $\hat{\mathcal{L}}(Z_2(\mathbb{X}_2) = \mathbf{z}_2; \eta_2)$ met en jeu $\text{cov}(Z_2(\mathbb{X}_2), Z_2(\mathbb{X}_2))^{-1} = k_2(\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2)^{-1}$

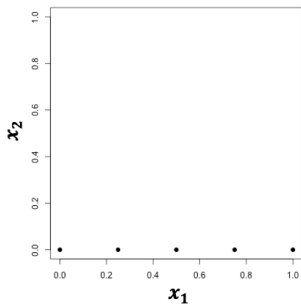
Les plans \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 doivent donc être tels que :

- $\tilde{\mathbb{X}}_1$ ait des points éloignés les uns des autres
- \mathbb{X}_2 ait des points éloignés les uns des autres et soit loin de la droite $\mathcal{D} : x_2 = 0$.

Connaissant \mathbb{X}_1 on cherche \mathbb{X}_2 solution des problèmes

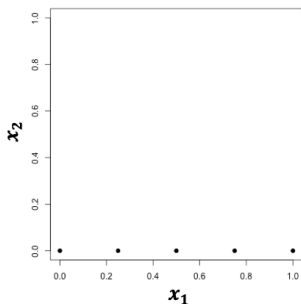
- $\max_{\tilde{\mathbb{X}}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1)$ où $\Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = \text{Maximin}(\tilde{\mathbb{X}}_1)$
- $\max_{\mathbb{X}_2} \Phi_2(\mathbb{X}_2)$ où $\Phi_2(\mathbb{X}_2) = \text{Maximin}(\mathbb{X}_2) + \text{dist}(\mathbb{X}_2, \mathcal{D})$

Illustration



$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{1}{8}$$

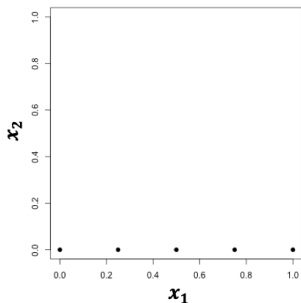
Illustration



$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{1}{8}$$

Comment construire \mathbb{X}_2 de taille 4 non imbriquée ?

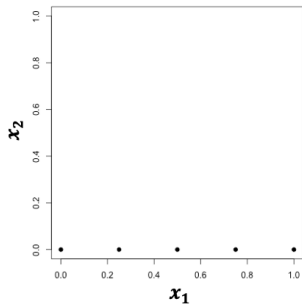
Illustration



$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

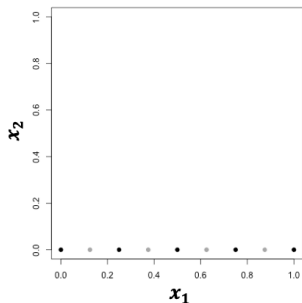
Comment construire \mathbb{X}_2 de taille 4 non imbriquée? On construit colonne par colonne.

Première colonne



$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

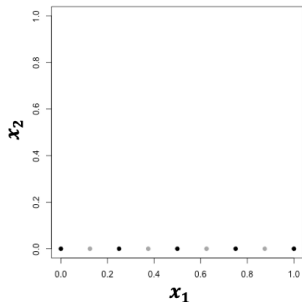
Première colonne



$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbb{X}}_1 = \mathbb{X}_2(1, :) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Première colonne

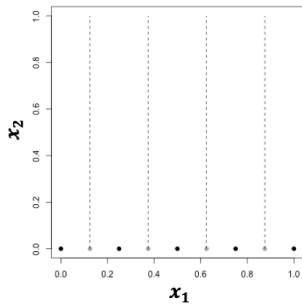


$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{1}{8}$$

$$\hat{\mathbb{X}}_1 = \mathbb{X}_2(1, :) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \frac{1}{8}$$

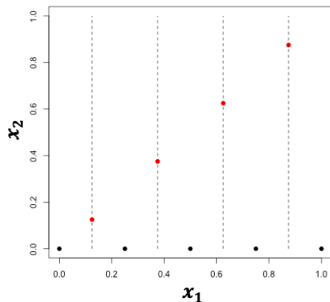
$$\tilde{\mathbb{X}}_1 = \mathbb{X}_1 \cup \hat{\mathbb{X}}_1 = \left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \right) \frac{1}{8}, \quad \Phi_1 \left(\tilde{\mathbb{X}}_1 \right) = 0.125.$$

Deuxième colonne



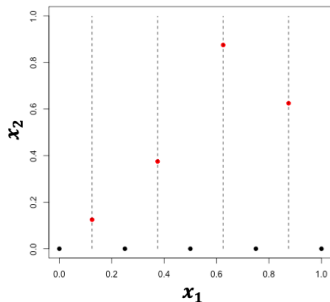
$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix},$$

Deuxième colonne



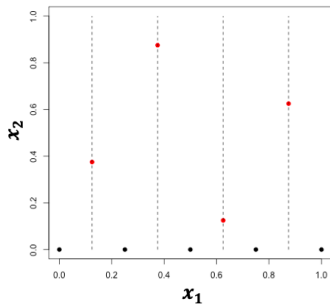
$$\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(\mathbb{X}_2) = 0.35$$

Deuxième colonne



$$\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(\mathbb{X}_2) = 0.35$$

Deuxième colonne

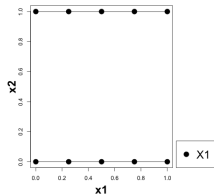


$$\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(\mathbb{X}_2) = 0.56$$

Perspectives

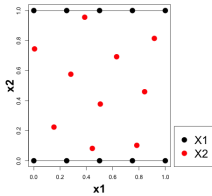
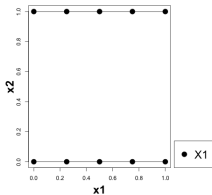
Perspectives

Plusieurs sous-espaces



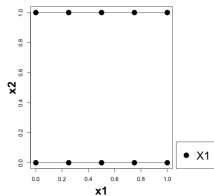
Perspectives

Plusieurs sous-espaces

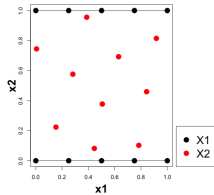
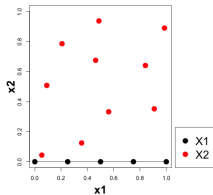


Perspectives

Plusieurs sous-espaces

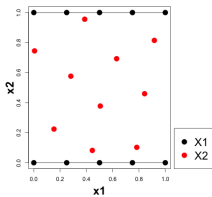
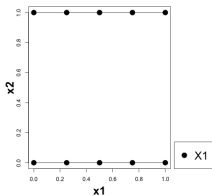


Enrichissement des échantillons

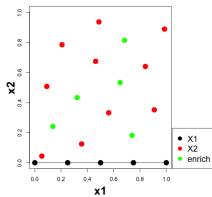
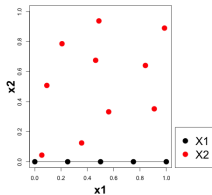


Perspectives

Plusieurs sous-espaces

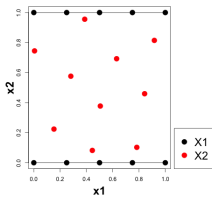
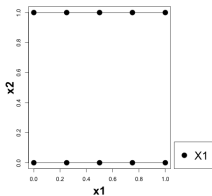


Enrichissement des échantillons

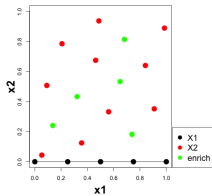
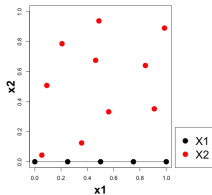


Perspectives

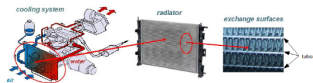
Plusieurs sous-espaces



Enrichissement des échantillons

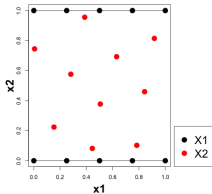
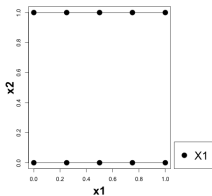


Ajout de variables catégorielles

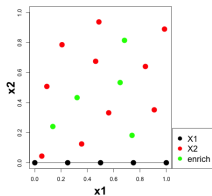
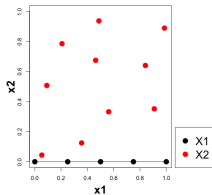


Perspectives

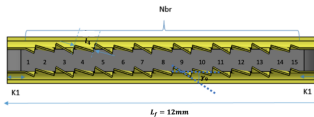
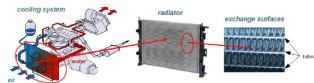
Plusieurs sous-espaces



Enrichissement des échantillons



Ajout de variables catégorielles



Ergodicité, stationnarité

- L'ergodicité du processus est une condition nécessaire à l'estimation de ses paramètres à partir d'une seule de ses réalisations [Santner et al., 2003].
- Un processus stationnaire du second-ordre est ergodique [Santner et al., 2003].
- Le maximum de vraisemblance est consistant dans \mathbb{R}^d si le plan d'expérience est asymptotiquement dense [Bachoc, 2013].
- Dans $[0, 1]^d$ pour un processus centré, [Bachoc, 2013]
 - Pour $d = 1$, pour le noyau matern avec n'importe quel ν , le max de vraisemblance est consistant pour le paramètre $\frac{\sigma^2}{\theta^{2\nu}}$
 - Pour $d \geq 2$, pour le noyau produit tensoriel matern $\frac{1}{2}$, le max de vraisemblance est consistant pour les paramètres $(\sigma^2, \theta_1, \dots, \theta_d)$.
 - Pour $d \geq 3$, pour le noyau produit tensoriel matern $\frac{3}{2}$, le max de vraisemblance est consistant pour les paramètres $(\sigma^2, \theta_1, \dots, \theta_d)$.
 - Pour le noyau gaussien, le max de vraisemblance est consistant pour les paramètres $(\theta_1, \dots, \theta_d)$.

Formule générale du processus P [Gauthier and Bay, 2012]

Soit $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{GP}(0, k)$ le processus latent. Alors

$$\mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x_1, x_2) \int_0^1 \tilde{\phi}_n(t_1) \tilde{Z}_2(t_1, 0) dt_1$$

où

$$\phi_n(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 k((x_1, x_2), (t_1, 0)) \tilde{\phi}_n(t_1) dt_1$$

et $(\lambda_n, \tilde{\phi}_n)_n$ sont solutions de

$$\int_0^1 k((x_1, 0), (t_1, 0)) \tilde{\phi}_n(t_1) dt_1 = \lambda_n \tilde{\phi}_n(x_1)$$

Formule dans le cas produit tensoriel

- Le problème aux valeurs propres devient

$$\int_0^1 r_1(x_1, t_1) \tilde{\phi}_n(t_1) dt_1 = \lambda_n \tilde{\phi}_n(x_1)$$

- ϕ_n devient

$$\phi_n(x_1, x_2) = r_2(x_2, 0) \tilde{\phi}_n(x_1)$$

- $\mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \tilde{Z}_2(t_1, 0), \forall t_1 \in [0, 1] \right]$ devient

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\phi}_n(x_1) \int_0^1 \tilde{\phi}_n(t_1) \tilde{Z}_2(t_1, 0) dt_1 r_2(x_2, 0)}_{=\tilde{Z}_2(x_1, 0)}$$

Processus P avec conditionnement multiple

Soit $\tilde{Z}_2 \sim \mathcal{GP}(0, k)$ le processus latent. Le processus P conditionné sur $x_2 = 0$ et $x_2 = 1$ est défini par :

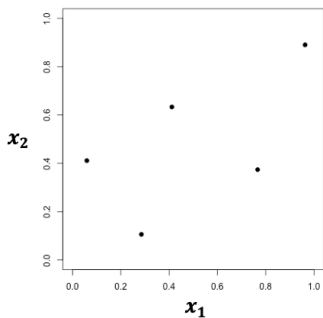
$$Z_2^P(x_1, x_2) = \tilde{Z}_2(x_1, x_2) - \mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \begin{array}{l} \tilde{Z}_2(t_1, 0) = 0 \\ \tilde{Z}_2(t_1, 1) = 0 \end{array} \forall t_1 \in [0, 1] \right]$$

Si $k = r_1 r_2$ alors $\mathbb{E} \left[\tilde{Z}_2(x_1, x_2) \mid \begin{array}{l} \tilde{Z}_2(t_1, 0) = 0 \\ \tilde{Z}_2(t_1, 1) = 0 \end{array} \forall t_1 \in [0, 1] \right]$ est égal à

$$(r_2(x_2, 0) \quad r_2(x_2, 1)) \begin{pmatrix} r_2(0, 0) & r_2(0, 1) \\ r_2(1, 0) & r_2(1, 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_2(x_1, 0) \\ \tilde{Z}_2(x_1, 1) \end{pmatrix}$$

Construction des premières colonnes cas multidimensionnel

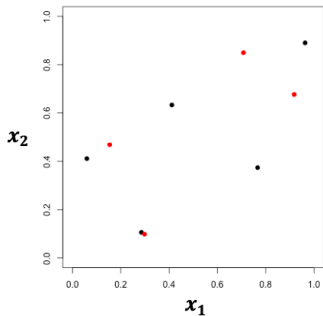
On a une fonction $f(x_1, \dots, x_d)$. A l'étape 1, on considère (x_1, x_2) uniquement.
On génère \mathbb{X}_1 .



$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.63 \\ 0.29 & 0.11 \\ 0.06 & 0.41 \\ 0.96 & 0.89 \\ 0.77 & 0.37 \end{pmatrix}$$

Construction des premières colonnes cas multidimensionnel

On a une fonction $f(x_1, \dots, x_d)$. A l'étape 1, on considère (x_1, x_2) uniquement.
On génère \mathbb{X}_1 .

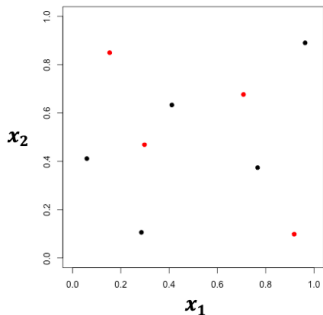


$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.63 \\ 0.29 & 0.11 \\ 0.06 & 0.41 \\ 0.96 & 0.89 \\ 0.77 & 0.37 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.85 \\ 0.30 & 0.10 \\ 0.15 & 0.47 \\ 0.92 & 0.68 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = 0.01$$

Construction des premières colonnes cas multidimensionnel

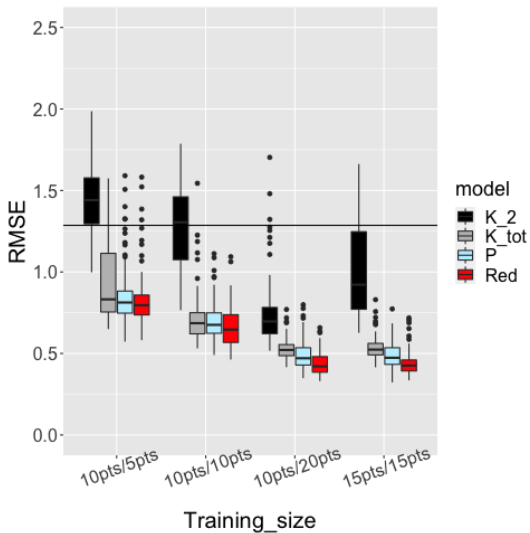
On a une fonction $f(x_1, \dots, x_d)$. A l'étape 1, on considère (x_1, x_2) uniquement.
On génère \mathbb{X}_1 .



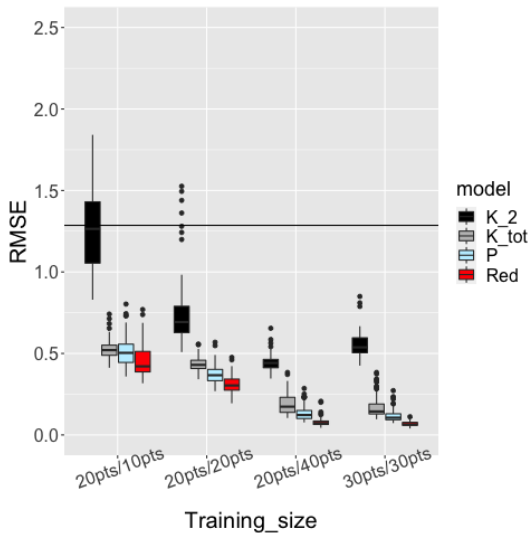
$$\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.63 \\ 0.29 & 0.11 \\ 0.06 & 0.41 \\ 0.96 & 0.89 \\ 0.77 & 0.37 \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \\ 0.30 & 0.47 \\ 0.71 & 0.68 \\ 0.92 & 0.10 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(\tilde{\mathbb{X}}_1) = 0.2$$

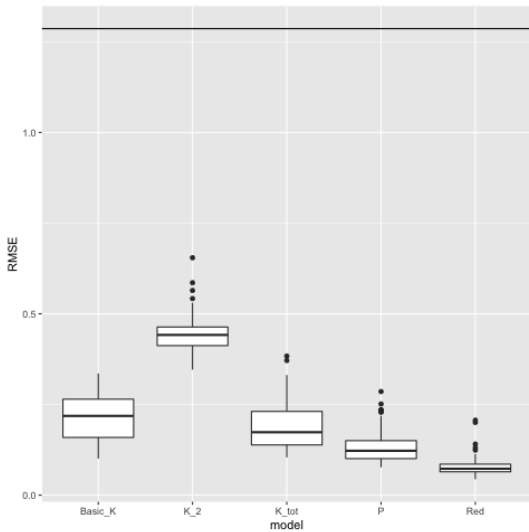
Résultats complets exemple analytique



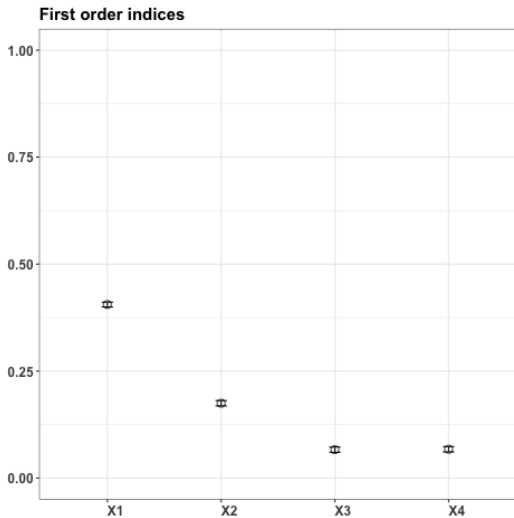
Résultats complets exemple analytique



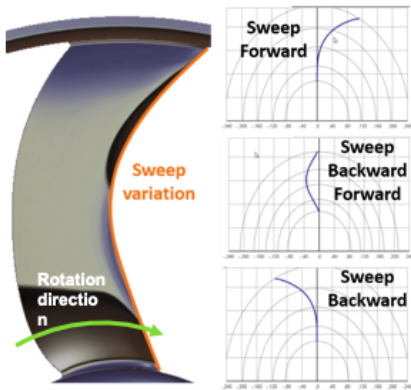
Krigeage complet exemple analytique



Indices de Sobol de la fonction analytique

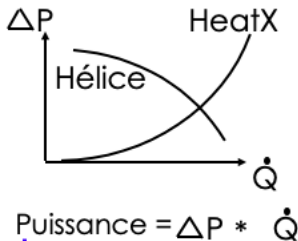


3 configurations d'empilements tangentiels

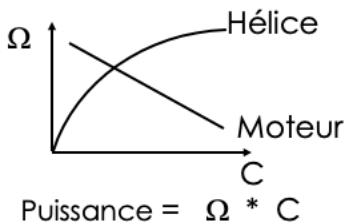


Rendement hélice

CHARACTERISTIQUES AERODYNAMIQUES



CHARACTERISTIQUES MECHANIQUES

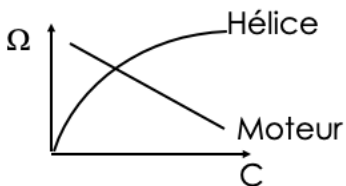


Rendement hélice: 45-55%

$$\eta_{\text{hélice}} = \frac{\Delta P * \dot{Q}}{C * \Omega}$$

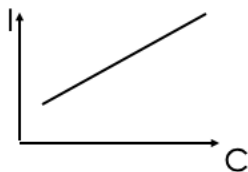
Rendement moteur

CHARACTERISTIQUES MECHANIQUES



$$\text{Puissance} = \Omega * C$$

CHARACTERISTIQUES ELECTRIQUES

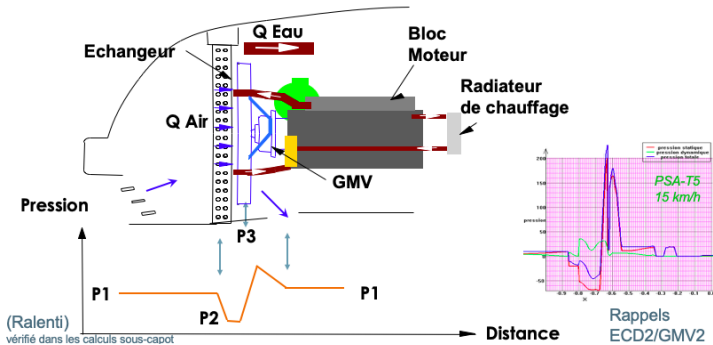


$$\text{Puissance} = U * I$$

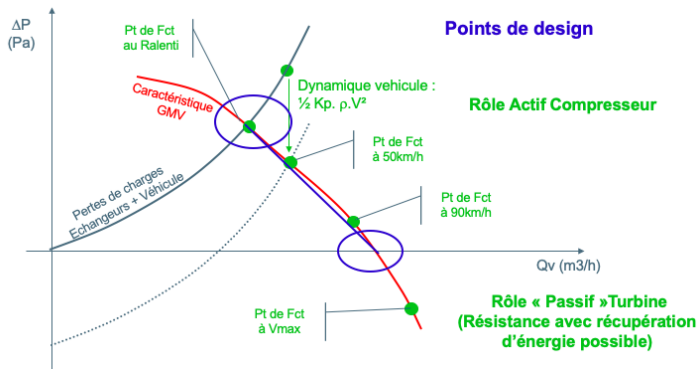
Rendement moteur : 60-75%

$$\eta_{\text{moteur}} = \frac{C * \Omega}{U * I}$$

Variations de la pression



Point de fonctionnement en fonction de la vitesse de véhicule



Composition du GMV (groupe motoventilateur)

Hélice

Générer le flux d'air

Buse /support

*Guider le flux d'air
Porter le GMV*

Moteur

Entraîner l'hélice

Boîtier de contrôle

Adapter la vitesse au besoin

